УДК 517.983

Я. І. Грушка

Трансляційно інваріантні оператори та операторний аналог сліду за різницевою змінною

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Побудовано теорію банахових просторів "узагальнених" операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором. Дана теорія може бути корисною при дослідженні таких задач математичної фізики багаточастинкових систем, постановка яких неможлива в просторі операторів з обмеженим слідом.

У багатьох роботах, присвячених дослідженню багаточастинкових квантових систем, еволюція описується з допомогою групи операторів, що діє в просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ операторів *з обмеженим слідом над* гільбертовим простором $\mathfrak{H}$ [1–3]. Проте цього простору виявляється недостатньо, зокрема, для розв'язання задач, постановка яких природна в класі операторів з трансляційно-інваріантним ядром, оскільки такі оператори не належать до простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Саме тому в [3] ставиться питання про необхідність вивчення груп операторів у більш загальних операторних просторах, ніж $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Мета даної роботи — побудова і дослідження таких (більш загальних) просторів операторів.

Теорема про слід трансляційно інваріантного оператора. Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ — комплексний, сепарабельний гільбертовий простір. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ будемо позначати простір *лінійних неперервних* операторів над $\mathfrak{H}$, а через $\mathbb{O}$ і $\mathbb{I}$ — нульовий та одиничний оператори простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ відповідно. Для оператора $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ через $\mathbf{Tr}(A)$ будемо позначати *слід* оператора A.

Нехай B — самоспряжений (взагалі кажучи, необмежений) оператор в $\mathfrak{H}$. Через $\sigma_p(B)$ будемо позначати *точковий спектр* оператора B, а через $U(\tau)$ — C_0-групу унітарних операторів $U(\tau) = e^{i\tau B}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ є *трансляційно інваріантним* відносно B, якщо він комутує з розкладом одиниці оператора B (що рівносильно $AU(\tau) = U(\tau)A$, $\tau \in \mathbb{R}$).

Основними прикладами трансляційно інваріантних операторів є лінійні неперервні оператори в просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, які породжуються *трансляційно інваріантним ядром*, тобто $(A_{\mathcal{K}}x)(\vec{t}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s})x(\vec{s})\,d\vec{s}$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathfrak{H}$, де ядро $\mathcal{K}\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ задовольняє умову $\mathcal{K}(\vec{t}+h, \vec{s}+h) = \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s})$, $\vec{t}$, $\vec{s} \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}$ (тут $\vec{t}+h = (t_1+h, \ldots, t_d+h)$, $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$). Такі оператори є трансляційно інваріантними відносно генератора групи зсувів по "діагональному" напрямку:

$$(U^{(d)}(\tau)x)(\vec{s}) = x(\vec{s}+\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R}, \qquad \vec{s} \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Оператори з трансляційно інваріантним ядром вивчались у монографії [4].

Теорема 1. *Нехай невід'ємний оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ є трансляційно інваріантним відносно оператора $B = B^*$ такого, що $\sigma_p(B) = \varnothing$. Тоді $A = \mathbb{O}$.*

Навпаки, якщо точковий спектр оператора $B = B^*$ не порожній, то завжди існує ненульовий трансляційно інваріантний відносно B оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$.

У випадку операторів з трансляційно інваріантним ядром теорема 1 перетворюється в загальновідоме твердження про те, що такі оператори (в ненульовому випадку) не належать до простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Тому в монографії [4] для цих операторів введено поняття сліду за "різницевою" змінною:

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}(A_{\mathcal{K}}) = \widetilde{\mathbf{Tr}}_{i,t_i}(A_{\mathcal{K}}) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{\mathcal{K}}(t_1, \ldots, t_d) dt_1 \cdots dt_{i-1} dt_{i+1} \cdots dt_d, & d > 1, \\ \mathcal{K}(0,0), & d = 1, \end{cases}$$

$1 \leqslant i \leqslant d$, де $\widetilde{\mathcal{K}}(\vec{t}) = \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{t})$. Легко перевірити, що для трансляційно інваріантного ядра $\mathcal{K}$ величина $\widetilde{\mathbf{Tr}}_{i,t_i}(A_{\mathcal{K}})$ *не залежить* від індексу i та змінної t_i.

Оскільки поняття сліду застосовується до операторів в абстрактному гільбертовому просторі, виникає задача визначення в абстрактному гільбертовому просторі і аналогу поняття сліду за різницевою змінною. Наведемо приклад, що ілюструє можливий шлях розв'язання поставленої проблеми.

Приклад 1. У просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ розглянемо спектральну міру $(P(\Delta)x)(t) := \chi_\Delta(t)x(t)$, $x \in \mathfrak{H}$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, де χ_Δ — *характеристична функція* множини Δ, а $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра *борелівських* підмножин $\mathbb{R}$. Легко перевірити, що тоді для оператора $A_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ має місце рівність

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}(A_{\mathcal{K}}) = \frac{\mathbf{Tr}(P(\Delta) A_{\mathcal{K}} P(\Delta))}{\mathbf{m}(\Delta)}, \qquad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \qquad 0 < \mathbf{m}(\Delta) < \infty,$$

де $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Зауважимо, що подібні спектральні міри існують і в просторі $L_2(\mathbb{R}^d)$ $(d \in \mathbb{N})$:

$$(P_i^{(d)}(\Delta)x)(\vec{t}) := \chi_\Delta(t_i)x(\vec{t}), \qquad x \in L_2(\mathbb{R}^d), \qquad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \qquad i \in \overline{1,d}. \tag{2}$$

Означення 1. Нехай $(R, \mathcal{R})$ — вимірний простір (тобто $\mathcal{R}$ — σ-алгебра підмножин R), $P(\cdot)\colon \mathcal{R} \mapsto \mathfrak{H}$ — спектральна міра на σ-алгебрі $\mathcal{R}$. І нехай μ — деяка скалярна σ-скінченна і не тотожно рівна нулю міра на $\mathcal{R}$. Тоді четвірку $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ будемо називати *проекційним простором з мірою* над простором $\mathfrak{H}$ (*ПМ-простором* над $\mathfrak{H}$).

Наступною метою є побудова за даним ПМ-простором банахового *простору операторів з обмеженим проекційним слідом* (ПООПС) — певного аналогу простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Проте, на відміну від $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, спроба визначити ПООПС як деякий підпростір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ приводить до неповного простору, тобто простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ виявляється "занадто вузьким" для поставленої мети. Тому в наступному пункті будується необхідний для цього більш широкий операторний простір.

Простори узагальнених векторів та узагальнених операторів, породжені спектральними мірами. Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — ПМ-простір. Покладемо

$$\mathfrak{H}^+_{P,\mu} := \bigcup_{\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}} P(\Delta)\mathfrak{H}, \qquad \text{де} \qquad \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}} = \{\Delta \in \mathcal{R} \mid \mu(\Delta) < \infty\}.$$

Неважко переконатись, що $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ є лінійним простором відносно алгебраїчних операцій, індукованих з простору $\mathfrak{H}$.

Означення 2. Будемо вважати, що послідовність векторів $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ збігається до вектора $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, у сенсі простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ (позначення $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x$), якщо існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$ і $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Легко перевірити, що введена збіжність перетворює $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ у лінійний простір зі збіжністю в сенсі [5–7] (це означає, зокрема, що операції додавання і множення на комплексне число є неперервні відносно даної збіжності). Більше того, можна довести, що цей простір є повним у сенсі [6, 7].

Розглянемо простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu} = (\mathfrak{H}^+_{P,\mu})'$ антилінійних неперервних функціоналів над простором $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, тобто простір таких функціоналів $l\colon \mathfrak{H}^+_{P,\mu} \mapsto \mathbb{C}$, що:

а) $l(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \overline{\alpha}_1 l(x_1) + \overline{\alpha}_2 l(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$;

б) якщо $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \ni x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, то $l(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} l(x)$.

Твердження 1. *Антилінійний функціонал $l\colon \mathfrak{H}^+_{P,\mu} \mapsto \mathbb{C}$ належить до простору $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ тоді і тільки тоді, коли для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ функціонал*

$$l_\Delta(x) = l(P(\Delta)x), \qquad x \in \mathfrak{H} \tag{3}$$

належить до простору $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$.

Означення 3. Будемо говорити, що послідовність функціоналів $\{l_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ збігається (сильно) до функціонала $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ у просторі $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (позначення $l_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^-}{\to}} l$), якщо для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ справедливо $\|(l_n)_\Delta - l_\Delta\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, де функціонали $(l_n)_\Delta$ і l_Δ означені у формулі (3).

Підкреслимо, що замість слабкої збіжності, яка часто зустрічається в теорії оснащених просторів [8, с. 20], ми будемо розглядати саме сильну збіжність, введену в означенні 3. Неважко перевірити, що ця збіжність перетворює $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ у лінійний простір зі збіжністю.

Вкладення простору $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ будується стандартним чином через ототожнення елемента $x \in \mathfrak{H}$ з функціоналом $\psi[x]$ скалярного множення на елемент x:

$$x = \psi[x], \qquad \text{де} \qquad \psi[x](y) := (x,y), \qquad y \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}.$$

Твердження 2. *Усі вкладення $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ щільні і неперервні.*

У випадку, коли $\mathfrak{H} = L_2([0,2\pi])$, а ПМ-простір $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ має вигляд $R = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = 2^{\mathbb{Z}}$, $\mu(\Delta) = \mathrm{card}(\Delta)$, $(P(\Delta)f)(x) = \sum\limits_{k\in\Delta} f\hat{\ }(k)e^{ikx}$ ($\Delta \in \mathcal{R}$, $f \in \mathfrak{H}$, $x \in [0,2\pi]$), де $\mathrm{card}(\Delta)$ — потужність множини Δ, а $f\hat{\ }(k)$ — k-й коефіцієнт ряду Фур'є функції f, простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ збігається з простором тригонометричних многочленів, а $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ — з простором узагальнених періодичних функцій, введеним у роботі [9].

Надалі через $\mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$ будемо позначати простір лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, тобто таких лінійних операторів $Q\colon \mathfrak{H}^-_{P,\mu} \mapsto \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, що $\forall \{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ $(f_n \overset{(P,\mu)^-}{\to} f \Longrightarrow Qf_n \overset{(P,\mu)^-}{\to} Qf)$. Для оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ через A_+ будемо позначати звуження оператора A на простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$: $A_+ = A \upharpoonright \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$.

Твердження 3. *Якщо $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $(A^*)_+ \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}^+_{P,\mu})$, то оператор A допускає єдине продовження на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ до оператора $A_- \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$ $(A_- \supseteq A)$.*

З твердження 3 випливає, що для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}$ існує єдине продовження оператора $P(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ до оператора $\mathbb{P}(\Delta) = P(\Delta)_- \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$.

Твердження 4. *Оператори $\{\mathbb{P}(\Delta)\colon \Delta \in \mathcal{R}\}$ мають такі властивості:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{O}; \qquad \mathbb{P}(R) = \mathbb{I}; \qquad \mathbb{P}(\Delta)^2 = \mathbb{P}(\Delta), \Delta \in \mathcal{R}; \\ &\mathbb{P}(\Delta_1 \textstyle\bigcap \Delta_2) = \mathbb{P}(\Delta_1)\mathbb{P}(\Delta_2), \qquad \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Більше того, має місце σ-адитивність $\mathbb{P}(\cdot)$, тобто якщо $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}$ — диз'юнктна послідовність множин ($\Delta_i \bigcap \Delta_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\Delta_n)$, де збіжність ряду слід розуміти в сильному сенсі над $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$.

Основним об'єктом подальшого розгляду буде простір $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H}) := \mathcal{L}(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}, \mathfrak{H}_{P,\mu}^{-})$ лінійних неперервних операторів з простору $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ у простір $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$.

Твердження 5. *Для того щоб лінійний оператор $A\colon \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \longmapsto \mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ належав до $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ необхідно і достатньо, щоб для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ оператор $\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)$ належав до простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.*

Означення 4. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$, $A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Будемо говорити, що послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *рівномірно збігається* до оператора A *в просторі* $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ (*позначення* $A_n \overset{(P,\mu)}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} A$), якщо для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ $\|\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta) - \mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)\| \to 0$, $n \to \infty$.

Можна довести, що введена в означенні 4 збіжність перетворює $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ у лінійний простір зі збіжністю.

Теорема 2. *Лінійний простір зі збіжністю $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ є повний.*

Підкреслимо, що повноту в теоремі 2 треба розуміти в сенсі [6, 7].

Простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ можна вкласти в $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$, використовуючи ототожнення оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з оператором A_+, якщо A_+ розглядати як оператор з $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$.

Простір операторів з обмеженим проекційним слідом та його властивості. Нехай $A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Покладемо:

$$\begin{aligned} &\nu_{P,A}(\Delta) := \mathbf{Tr}(|\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)|), \qquad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}; \\ &\|A\|_{P,\mu} := \sup\left\{ \frac{\nu_{P,A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}(\Delta) > 0 \end{array} \right\}, \qquad A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H}), \end{aligned} \tag{5}$$

де у випадку $\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta) \notin \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ покладемо $\mathbf{Tr}(|\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)|) := \infty$, а у випадку $\mu(\Delta) = 0$ покладемо $\nu_{P,A}(\Delta)/\mu(\Delta) := \infty$. Оскільки міра μ не є тотожно нульовою, то визначення величини $\|\cdot\|_{P,\mu}$ — коректне (тобто супремум у (5) береться за непорожньою множиною). Як випливає з прикладу 1, у просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, для невід'ємного оператора $A_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ і спектральної міри (2) має місце рівність $\|A_{\mathcal{K}}\|_{P_i^{(d)},\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{Tr}}(A_{\mathcal{K}})$, $i \in \overline{1,d}$ (за умови, що права частина рівності має сенс, тобто скінченна). Оскільки величина $\|A\|_{P,\mu}$ не завжди скінченна, розглянемо клас операторів

$$\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) := \{A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})\colon \|A\|_{p,\mu} < \infty\}.$$

Теорема 3. $(\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu})$ *є банаховим простором.*

Зауважимо, що теорема 3 використовує в своєму доведенні терему 2.

Трансляційна інваріантність у просторах $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ і $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Означення 5. Нехай $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ — група унітарних операторів у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. ПМ-простір $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ над $\mathfrak{H}$ будемо називати *трансляційно регулярним* відносно групи $\{U(t)\}$, якщо $\forall t \in \mathbb{R}$ $U(t)_+ \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+})$.

Безпосередньо з означення 5 і твердження 3 випливає, що якщо ПМ-простір $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ над $\mathfrak{H}$ є трансляційно регулярним відносно групи $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, то оператори

$\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ допускають продовження на простір $\mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}$ до операторів $\{U(t)_{-}\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H}^{-}_{P,\mu})$. Можна довести, що для сім'ї операторів $\{U(t)_{-}\}$ зберігаються групові властивості.

П р и к л а д 2. Нехай $U(t) = e^{itA}$, $t \in \mathbb{R}$ — група унітарних операторів у $\mathfrak{H}$ (де $A = A^*$). Покладемо $R := \mathbb{R}$; $\mathcal{R} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$; $P(\Delta) := E_A(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, де $E_A(\cdot)$ — розклад одиниці оператора A. Тоді для довільної σ-скінченної міри μ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ПМ-простір $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ є трансляційно регулярним відносно групи $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$. Отже, довільна C_0-група унітарних завжди операторів має трансляційно регулярні (відносно себе) ПМ-простори.

П р и к л а д 3. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$, $R = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, а спектральна міра P та ж сама, що і в прикладі 1. Тоді ПМ-простір $(R, \mathcal{R}, P, \mathbf{m})$ є трансляційно регулярним відносно групи $U^{(1)}(\cdot)$, визначеної в (1) при $d = 1$.

Наведене нижче твердження дає механізм побудови трансляційно регулярних ПМ-просторів над тензорним добутком гільбертових просторів.

Твердження 6. *Нехай, $\mathfrak{H}$, $\mathcal{K}$ — гільбертові простори і четвірка $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ є трансляційно регулярним ПМ-простором відносно групи $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ над простором $\mathfrak{H}$. Тоді для довільної групи $\{V(t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{K})$ унітарних операторів у просторі $\mathcal{K}$ четвірки $(R, \mathcal{R}, P \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}, \mu)$ і $(R, \mathcal{R}, \mathbb{I}_{\mathcal{K}} \otimes P, \mu)$ є трансляційно регулярними ПМ-просторами відносно груп $\{U(t) \otimes V(t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H} \otimes \mathcal{K})$ і $\{V(t) \otimes U(t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{K} \otimes \mathfrak{H})$ над просторами $\mathfrak{H} \otimes \mathcal{K}$ і $\mathcal{K} \otimes \mathfrak{H}$ відповідно, де $\mathbb{I}_{\mathcal{K}}$ — одиничний оператор над простором $\mathcal{K}$ і $(P \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}})(\Delta) = P(\Delta) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}$, $(\mathbb{I}_{\mathcal{K}} \otimes P)(\Delta) = \mathbb{I}_{\mathcal{K}} \otimes P(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{R}$.*

З прикладу 3 та твердження 6 випливає, що для $d \in \mathbb{N}$ і $i \in \overline{1,d}$ четвірка $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_i^{(d)}, \mathbf{m})$ є трансляційно регулярним ПМ-простором відносно групи $\{U^{(d)}(t)\}$, де $P_i^{(d)}$ та $\{U^{(d)}(t)\}$ визначені в (2) та (1) відповідно.

Означення 6. Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — трансляційно регулярний ПМ-простір відносно групи $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Оператор $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ будемо називати *трансляційно інваріантним* відносно генератора групи $\{U(t)\}$, якщо для довільного $t \in \mathbb{R}$ має місце рівність, $AU(t)_{+} = U(t)_{-}A$.

Враховуючи ототожнення оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з оператором $A_{+} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, можна довести, що у випадку обмеженого оператора A трансляційна інваріантність, введена на початку роботи, рівносильна тій, що введена в означенні 6.

Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — трансляційно регулярний ПМ-простір відносно групи $\{U(t)\}$. Позначимо через $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})_{\tau(U)}$ множину всіх трансляційно інваріантних відносно генератора групи $\{U(t)\}$ операторів $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Теорема 4. *Простір $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})_{\tau(U)}$ є замкнутим підпростором простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ (відносно норми $\|\cdot\|_{P,\mu}$).*

1. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 252 p.
2. *Arnold A.* Mathematical properties of quantum evolution equations // Lect. Notes Math. Vol. 1946. – Berlin: Springer, 2008. – P. 45–109.
3. *Gerasimenko V. I.* Groups of operators for evolution equations of quantum many-particle systems // Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 191. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 341–355.
4. *Petrina D. Ya.* Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. Continuous systems. – Amsterdam: Kluwer, 1995. – 624 p.
5. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2. – Москва: Высш. шк., 1981. – 584 с.
6. *Duldrey R. M.* On sequentional convergence // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – **122**. – P. 483–507.
7. *Мосягин В. В., Широков Б. М.* Линейные пространства со сходимостью и конусом // Тр. Петрозаводск. гос. ун-та. Сер. Матем. – 2001. – Вып. 8. – С. 14–19.

8. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
9. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – **257**, № 4. – С. 799–804.

Інститут математики НАН України, Київ *Надійшло до редакції 21.07.2009*

Ya. I. Grushka

Translation-invariant operators and the operator analog of a difference variable trace

A theory of Banach spaces of "generalized" operators with bounded projection trace is constructed over a given Hilbert space. This theory may be useful in studying such problems of mathematical physics for many-particle systems, whose exploring is impossible in the space of operators with bounded trace.