УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана

Досліджено стаціонарну задачу Стефана з урахуванням конвективних рухів у рідинній фазі на площині. Отримано рівняння вільної границі в залежності від інтенсивності вихору. Побудовано наближений розв'язок задачі.

1. Постановка задачи. Теплофизические процессы в кристаллизаторе, сопровождающиеся фазовыми переходами вещества, описываются математической моделью, в которой температура каждой из фаз удовлетворяет уравнению переноса тепла со своими теплофизическими коэффициентами. На границе раздела фаз обе температуры постоянны и равны температуре фазового перехода (для химической однородной среды), а на заданных частях границы — стенках кристаллизатора, поддоне — поддерживается определенный режим (теплоотвод, теплоизоляция и др.). Поверхность раздела фаз (фронт кристаллизации) является неизвестной, или "свободной", границей, и для ее определения дополнительно задается "условие Стефана", означающее, что тепловой поток через фронт кристаллизации в сторону твердой фазы равен тепловому потоку со стороны жидкой фазы плюс скрытая теплота фазового перехода. Жидкая фаза рассматриваемого процесса заслуживает специального исследования ввиду априорной возможности существования поля скоростей, вызывающего интенсивную теплопередачу путем конвекции. Усиленная циркуляция в расплавленной шлаковой ванночке была обнаружена в исследованиях академика Б. Е. Патона и его сотрудников [1].

Наша цель состоит в изучении гидродинамических явлений в жидкой фазе, так как здесь экспериментальные исследования, насколько известно, отсутствуют.

Изучается стационарный случай в полосе $D = \{-1 < x < 1,\ H < y < 0\}$. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой D_γ^-, при этом концы γ лежат на вертикалях $x = \pm 1$. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y. Пусть $\psi(x, y)$ — функция тока, удовлетворяющая условиям: $\Delta\psi = \mu$, $(x, y) \in D_\gamma^+$, $\mu = \text{const} > 0$, $\psi = 0$, $(x, y) \in \partial D_\gamma^+$. Здесь μ считается достаточно малым численным параметром. Требуется определить, кроме функции тока $\psi(x, y)$, тройку $(u^\pm(x, y), \gamma)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&\lambda_+\Delta u^+ - \psi_y u_x^+ + \psi_x u_y^+ = 0, \qquad (x,y)\in D_\gamma^+, \qquad \lambda_+ = \text{const} > 0;\\
&u^+(x,0) = \upsilon, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad \upsilon = \text{const} > 1;\\
&u_x^\pm \pm \omega_0^+ u^\pm = 0, \qquad x = \pm 1, \qquad (x,y) \in \partial D_\gamma^+;\\
&\Delta u^- = 0, \qquad (x,y)\in D_\gamma^-;\\
&u^-(x,H) = 0, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad u^-(x,y) = u^+(x,y) = 1;
\end{aligned} \tag{1}$$

$$|\nabla u^-|^2 - \kappa^2 |\nabla u^+|^2 = 0, \qquad (x,y) \in \gamma,$$

где $\kappa = \mathrm{const}$, $0 < \kappa \leqslant 1$; $\omega_0^{\pm}$ — числа Нуссельта.

2. Приближенное решение задачи. Предложен метод изучения нелинейной задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ [2]:

$$\psi(x,y;\mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mu^{\kappa} \psi_{\kappa}(x,y), \qquad u^+(x,y;\mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mu^{\kappa} u_{\kappa}^+(x,y);$$

$$y(x,\mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mu^{\kappa} y_{\kappa}(x), \qquad \gamma: y = y(x,\mu), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Нулевое приближение $u_0(x,y)$ ищем как минимум функционала

$$I(u^+, u^-, \gamma_0) = \iint\limits_{D_{\gamma_0}^-} [u_x^{-2} + u_y^{-2}]\, dxdy + \kappa^2 \iint\limits_{D_{\gamma_0}^+} [u_x^{+2} + u_y^{+2}]\, dxdy +$$

$$+ \kappa^2 \omega_0^+ \int\limits_{\Gamma_\gamma^+} [u^{+2} - 1]\, dy + \omega_0^- \int\limits_{\Gamma_\gamma^-} [u^{-2} - 1]\, dy \qquad (2)$$

на соответствующем множестве допустимых функций; здесь $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_\gamma^+ \bigcap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma_\gamma^- = \partial D_\gamma^- \bigcap \{x = \pm 1\}$. Функционал (2) в классе функций $u_y^{\pm} > 0$ в $D_\gamma^{\pm}$ представим следующим образом:

$$I_1(y_1, y_2) = \iint\limits_{\Delta_1} \frac{1 + y_{1x}^2}{y_{1u}} dxdu + \kappa^2 \iint\limits_{\Delta_2} \frac{1 + y_{2x}^2}{y_{2u}} dxdu +$$

$$+ \omega_0^+ \kappa^2 \int\limits_1^{\upsilon} (u^2 - 1)[y_{2u}(1,u) + y_{2u}(-1,u)]\, du +$$

$$+ \omega_0^- \int\limits_0^1 (u^2 - 1)[y_{1u}(1,u) + y_{1u}(-1,u)]\, du,$$

где $\Delta_1 = (-1 < x < 1,\ 0 < u < 1)$, $\Delta_2 = (-1 < x < 1,\ 1 < u < \upsilon)$, $y_1(x,u)$ и $y_2(x,u)$ — решения уравнений $u_1(x,y) - u_1 = 0$, $u_2(x,y) - u_2 = 0$.

Будем минимизировать функционал $I_1(y_1, y_2)$ при помощи сумм

$$y_{1n}(x,u) = \sum_{j=0}^{L} \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} x^{2j} u^{\kappa} + H, \qquad (x,u) \in \overline{\Delta}_1;$$

$$y_{2n}(x,u) = \frac{\upsilon - u}{\upsilon - 1} \sum_{j=0}^{L} \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} x^{2j} u^{\kappa}, \qquad (x,u) \in \overline{\Delta}_2,$$

применяя при этом метод Ритца [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial a_{pq}} + \lambda_q = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, T_q; \qquad q = 0, 1, \ldots, L, \\ \dfrac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial b_{st}} - \lambda_t = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, \Theta_t; \qquad t = 0, 1, \ldots, L, \\ \sum\limits_{\kappa=1}^{T_0} a_{\kappa 0} - \sum\limits_{\kappa=0}^{\Theta_0} b_{\kappa 0} + H = 0, \qquad \sum\limits_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} - \sum\limits_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, L, \\ I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j}) = I_1\left(\sum\limits_{j=0}^{L}\sum\limits_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} x^{2j} u^{\kappa} + H; \dfrac{\upsilon - u}{\upsilon - 1}\sum\limits_{j=0}^{L}\sum\limits_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} x^{2j} u^{\kappa}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Лемма. *Пусть система Ритца* (3) *имеет решение при некоторых значениях параметров* $\omega_0^+ = \widetilde{\omega}_0^+$, $\omega_0^- = \widetilde{\omega}_0^-$, $\kappa = \widetilde{\kappa}$. *Тогда решения этой системы* $a_{\kappa j}(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$, $b_{\kappa j}(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$ *непрерывно зависят от параметров* ω_0^+, ω_0^-, κ *в некоторой окрестности точки* $(\widetilde{\omega}_0^+, \widetilde{\omega}_0^-, \widetilde{\kappa})$.

Проблема сходимости приближенных решений исследована в [3, 4].

Теорема. *Пусть* μ *— достаточно малая величина. Тогда справедлива формула*

$$\gamma : y(x, \mu) = y_0(x) - \mu\frac{u_1(x, y)}{u_{0y}(x, y)} + o(\mu), \qquad (x, y) \in \gamma_0, \tag{4}$$

где $y_0(x)$ *— решение уравнения* $u_0(x, y) - 1 = 0$ *в классе функций* $u_{0y}(x, y) > 0$ *в* D*;* $u_1(x, y)$ *— решение краевой задачи:*

$$\Delta u = f(x, y), \qquad (x, y) \in D; \qquad u(x, 0) = 0, \qquad u(x, H) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$u_x(0, y) = 0, \qquad H \leqslant y \leqslant 0; \qquad u_x \pm \omega_0^{\pm} u = 0; \qquad x = 1, \qquad (x, y) \in \partial D_{\gamma}^{\pm} \setminus \gamma;$$

$f(x, y) = \psi_{1y} u_{0x} - \psi_{1x} u_{0y}$ *при* $(x, y) \in D_{\gamma_0}^{+}$ *и* $f(x, y) = 0$ *при* $(x, y) \in D_{\gamma_0}^{-}$.

3. Приближенный анализ влияния конвекции на фронт кристаллизации. Численный анализ осуществлялся на основании формулы (4). В качестве функции $u_0(x, y)$ берется решение проблемы минимума функционала (2), которое может быть построено методом Фурье при $k = 1$, $\omega_0^+ = \omega_0^- = \omega_0$. Функции $\psi_1(x, y)$ и $u_1(x, y)$ находятся из условий минимума функционалов

$$\mathrm{I}_1(\psi) = \iint\limits_D (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\psi)\, dxdy,$$

$$\mathrm{I}_2(u) = \iint\limits_D (u_x^2 + u_y^2 + 2fu)\, dxdy + \omega_0 \int\limits_H^0 u^2(1, y)\, dy$$

на множествах

$$T_1 = \{\psi \colon \psi \in C^1(\overline{D}),\ \psi = 0,\ (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^{+}\},$$

$$T_2 = \{u \colon u \in C^1(\overline{D}),\ u(x, 0) = 0,\ u(x, H) = 0\}.$$

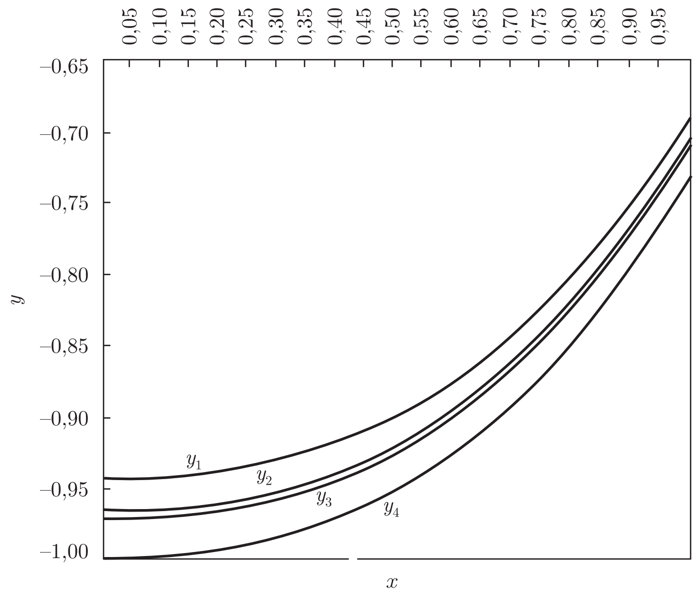

Рис. 1. Линии кристаллизации

Проблема минимума эффективно решается при помощи метода Ритца. При этом приближения Ритца ψ_n и u_n строятся следующим образом:

$$\psi_n = y(y-H)(y-y_0(x))(x-1)\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{m_k} c_{kj}x^{2j}y^k, \qquad u_n = y(y-H)\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}x^{2j}y^k,$$

$$n = \sup_{0\leqslant k\leqslant m}(m+2m_k),$$

где $y_0(x)$ — решение уравнения $u_0(x,y)-1=0$, $(x,y)\in D$ в классе функций $u_{0y}(x,y)>0$ в D.

Сходимость приближенных решений к точным решениям соответствующих краевых задач изучена в [5]. Неизвестные коэффициенты a_{kj} и c_{kj} определяются из условий минимума функций $\mathrm{I}_1(\psi_n) = \widetilde{\mathrm{I}}_1(c_{kj})$, $\mathrm{I}_2(u_n) = \widetilde{\mathrm{I}}_2(a_{kj})$.

Численный эксперимент осуществлялся при определенных значениях теплофизических значений параметров. На рис. 1 изображен график линий кристаллизации $y(x,\mu)$ при различных значениях μ: $-0{,}5$; 0; $0{,}1$; $0{,}5$. Кривые $y(x,\mu)$ строились в виде многочленов

$$y(x,\mu) = \alpha_3(\mu)x^3 + \alpha_2(\mu)x^2 + \alpha_1(\mu)x + \alpha_0(\mu).$$

Вычисления производились при $H = -10$, $v = 1{,}25$, $\omega_0 = 3{,}5$, при этом $y_1 = y(x,0{,}5)$; $y_2 = y(x,0{,}1)$; $y_3 = y_0(x)$ и $y_4 = y(x,-0{,}5)$.

Проделанный численный эксперимент подтверждает влияние конвективного теплообмена на процесс кристаллизации. Эксперимент сохранит свой смысл, если параметры ω_0^+ и ω_0^- брать в некоторой малой окрестности чисел $\omega_0 = 3{,}5$, а $k=1$.

1. *Патон Б. Е.* Избранные труды. – Киев: ИЭС им. Е. О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.
3. *Миненко А. С.* Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1546–1556.

4. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Там же. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1385–1394.
5. *Харик И. Ю.* О проблеме аппроксимации функций, связанной с исследованием сходимости вариационных процессов // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 2. – С. 157–160.

Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк

Поступило в редакцию 30.10.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

Approximation analysis of a stationary Stefan problem with convection

The two-dimensional stationary Stefan problem with the liquid phase convection is investigated. The free boundary equation depending on the vortex intensity is obtained. The approximate solution is constructed.