



УДК 621.186.1

© 2010

Член-корреспондент НАН України **А. А. Авраменко**,  
**Н. П. Дмитренко**, член-корреспондент НАН України **Б. И. Басок**,  
**А. В. Кузнецов**, **Д. Г. Блинов**

### Гидродинамическая неустойчивость течения в каналах ядерных реакторов с шаровой засыпкой

*На основі методу лінійних збурень отримано тривимірне рівняння для знаходження критеріїв гідродинамічної нестійкості в активній зоні ядерних реакторів з кульовими тепловиділяючими елементами. Рівняння одержано в припущенні, що проточна частина каналу може бути подана як макропористе середовище. Дослідження даного рівняння на власні значення методом колокації дозволило визначити критерій гідродинамічної нестійкості як функцію лінійної та нелінійної складової пористого гідродинамічного опору.*

В высокотемпературных газоохлаждаемых реакторах (ВТГР) активная зона состоит либо из засыпки шаровых топливных элементов, либо собирается из графитовых колон, образованных призматическими гексагональными блоками с распределенными в них тепловыделяющими элементами [1]. Эффективным способом увеличения коэффициента теплоотдачи является турбулизация теплоносителя. В случае с шаровыми тепловыделяющими элементами турбулизация происходит за счет возникающих при течении вихрей. Поэтому необходимо знать критерии гидродинамической неустойчивости при течении теплоносителя в каналах ВТГР. Знание критериев гидродинамической неустойчивости дает возможность спрогнозировать протекание гидродинамических и тепловых процессов. При этом активную зону с шаровыми тепловыделяющими элементами можно рассматривать как макропористую среду и использовать для ее описания модель Дарси–Брикмана–Форчаймера [2]. Указанная модель была положена в основу исследования гидродинамической неустойчивости в макропористой среде на основе двумерного подхода. [3] В настоящем исследовании используется трехмерное приближение.

**Основные уравнения.** Динамика потока в пористой среде описывается системой модифицированных дифференциальных уравнений Навье–Стокса и уравнением неразрывности [4]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \nabla^2 u - \nu_f \frac{\phi}{K} u - \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} |V| u, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_f \nabla^2 v - \nu_f \frac{\phi}{K} v - \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} |V| v, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_f \nabla^2 w - \nu_f \frac{\phi}{K} w - \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} |V| w, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты;  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости  $V$ ;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $\nu_f$  — кинематическая вязкость;  $\nabla$  — лапласиан;  $\phi$  — пористость;  $c_F$  — коэффициент Форчаймера;  $K$  — проницаемость;  $t$  — время. Данная система является основной для расчета критериев неустойчивости течения в пористой среде. Два последних слагаемых в уравнениях (1) учитывают гидравлическое сопротивление, вызванное пористостью среды. Первое из них описывает линейное сопротивление Дарси, а второе нелинейное сопротивление Форчаймера.

Для определения критериев гидродинамической неустойчивости используем метод линейных возмущений [4]. Согласно этому методу, параметры течения представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u &= U(y) + u'(t, x, y, z), & v &= v'(t, x, y, z), \\
w &= w'(t, x, y, z), & p &= P(x) + p'(t, x, y, z).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $U, P$  — параметры основного невозмущенного течения;  $u', v', w', p'$  — параметры возмущений. Основное невозмущенное течение определяется величинами:  $u = U(y), v = w = 0, p = P(x)$ .

Подставим выражения (2) в уравнения (1), отбросим квадратичные члены относительно составляющих скорости возмущающего движения. В результате получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + J \nu_f \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) - \nu_f \frac{\phi}{K} u' - \\
&\quad - 2\phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} U u', \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + J \nu_f \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) - \nu_f \frac{\phi}{K} v' - \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} U v', \\
\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + J \nu_f \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) - \nu_f \frac{\phi}{K} w' - \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} U w', \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $J = \nu_{\text{эф}}/\nu_f$ ,  $\nu_{\text{эф}}$  — эффективная кинематическая вязкость.

Коэффициент 2 в уравнении (3) возникает вследствие следующей математической операции [3]:

$$\begin{aligned} |V|(U + u') &= (U + u')\sqrt{(U + u')^2 + v'^2} = (U + u')\sqrt{U^2 + 2Uu' + u'^2 + v'^2} = \\ &= (U + u')U\sqrt{1 + \frac{2u'}{U} + \frac{u'^2 + v'^2}{U^2}} \approx (U + u')(U + u') = U^2 + 2Uu' + u'^2 \approx U^2 + 2Uu'. \end{aligned} \quad (4)$$

Возмущенные величины представим в виде двумерной волны  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ,  $p'$  в виде таких функций:

$$\begin{aligned} u' &= u_1(y) \exp i(\alpha x + \gamma z - \beta t), & v' &= v_1(y) \exp i(\alpha x + \gamma z + \beta t), \\ w' &= w_1(y) \exp i(\alpha x + \gamma z - \beta t), & p' &= p_1(y) \exp i(\alpha x + \gamma z - \beta t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\beta$  — комплексная величина и может быть представлена в виде  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ , где  $\beta_r$  — круговая частота отдельного колебания;  $\beta_i$  — коэффициент нарастания;  $\alpha$  и  $\gamma$  — волновые числа;  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ ,  $p_1$  — амплитуды.

Подставим уравнения (4) в (3). После этой подстановки продифференцируем  $y$ -ю компоненту уравнения движения по  $y$ ; умножим уравнение  $x$ -й компоненты на  $i\alpha$ , а уравнение  $z$ -й компоненты — на  $i\gamma$  и просуммируем полученные результаты. Полученное уравнение продифференцируем по  $y$  и сложим с ранее полученным выражением  $y$ -й компоненты, которая была продифференцирована по  $y$ . В результате описанных операций были исключены амплитуды  $u_1$ ,  $w_1$ ,  $p_1$  и получено уравнение четвертого порядка относительно  $v_1$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\Lambda M \tilde{v}'_1}{\tilde{\alpha}} + \tilde{v}'_1 \left( -i\tilde{c}\tilde{k}^2 + \frac{\tilde{k}^4}{\text{Re}\tilde{\alpha}} + \frac{\tilde{k}^2 M^2}{\text{Re}\tilde{\alpha}} i\tilde{k}^2 \tilde{U} + \frac{\Lambda M}{\tilde{\alpha}} i\tilde{U}'' \right) + \\ + \tilde{v}'' \left( i\tilde{c} - \frac{2\tilde{k}^2}{\text{Re}\tilde{\alpha}} - \frac{M^2}{\text{Re}\tilde{\alpha}} - i\tilde{U} - \frac{\Lambda M}{\tilde{\alpha}} \right) + \frac{\tilde{v}''''}{\text{Re}\tilde{\alpha}} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрих означает дифференцирование по  $y$ . В уравнении (6)  $\text{Da} = K/H^2$  — критерий Дарси;  $\text{Re} = u_\infty H/\nu$  — критерий Рейнольдса;  $M = (\text{Da} J/\phi)^{-1/2}$ ;  $\Lambda = \phi^{3/2} c_F u_\infty H/(\nu_f \sqrt{J})$ ;  $k^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ ;  $H$  — радиус канала;  $u_\infty$  — скорость в центре канала;  $\tilde{\alpha} = \alpha h$ ;  $\tilde{k} = kh$ ;  $\tilde{U} = U/u_\infty$ ;  $\tilde{c} = \beta/\alpha u_\infty$ .

В случае, когда  $M = \Lambda = 0$ , уравнение (6) преобразуется в классическое уравнение для расчета неустойчивости чистой жидкости.

Для того чтобы определить критерий гидродинамической неустойчивости, необходимо исследовать уравнение (6) на собственные значения. При этом граничные условия имеют следующий вид:

$$y = -1, \quad v = v' = 0, \quad y = 1, \quad v = v' = 0. \quad (7)$$

**Базовое течение.** Для того чтобы рассчитать критерии гидродинамической неустойчивости в пористой среде по уравнению (6) с граничными условиями (7), необходимо знать профиль невозмущенной скорости. Такие профили скорости были получены на основе численных расчетов на пакете Fluent. Параметры расчетов подбирались таким образом, чтобы локальное число Рейнольдса  $\text{Re}_K = v\sqrt{K}/\nu$  находилось в диапазоне от 0,1 до 100. Это позволило учесть наличие зон, где справедлив закон Дарси и закон Дарси–Форчаймера [2].

В результате расчетов было получено, что в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,1 до 2 профиль скорости хорошо описывается уравнением [2]:

$$U = \frac{\cosh M - \cosh(My)}{\cosh M - 1}. \quad (8)$$

При дальнейшем увеличении локального числа Рейнольдса расчетный профиль скорости начинает отличаться от (8). Заполненность профиля начинает увеличиваться и достигает предельной заполненности, после которой форма профиля не меняется. Этот профиль может быть описан следующим выражением:

$$U = 0,9881 - 0,0002657y + 0,0669899y^2 - 0,0001853y^3 - 1,03753y^4. \quad (9)$$

Таким образом, в расчетах устойчивости используются профили скорости, полученные численным образом с помощью пакета Fluent. Конкретный вид профиля выбирается по значению пары параметров  $M$  и  $\Lambda$ . Форма профиля меняется от формы, описываемой уравнением (8), до формы (9).

**Численный расчет критериев устойчивости.** Задача на собственные значения для уравнения (6) решалась методом коллокаций. Приближение Галеркина для данного течения взято в следующем виде [5]:

$$v = \sum_{j=1}^N a_j f_j(y). \quad (10)$$

В качестве пробных функций использовались выражения

$$\begin{aligned} f_i(y) &= (1 - y^2)^2 y^{2(j-1)}, \\ f_j(y) &= (1 - y^2)^2 T_{2j}(y), \end{aligned} \quad (11)$$

которые удовлетворяют граничным условиям, приведенным выше. Здесь  $T_j(y)$  — полиномы Чебышева первого рода.

Для верификации модели были проведены тестовые расчеты критерия устойчивости для течения в плоском канале при течении чистой жидкости ( $M = \Lambda = 0$ ). Профиль невозмущенной скорости в этом случае имеет вид:

$$U = 1,5(1 - y^2). \quad (12)$$

Результаты показали, что критическое число Рейнольдса  $Re_{кр} = 5772$ , что согласуется с данными работы [3]. Затем определялись критические параметры устойчивости при различных наборах значений параметров  $M$  и  $\Lambda$ . Расчеты показали, что при  $N = 500$  отличие результатов расчета критических значений безразмерных чисел подобия при использовании пробных функций (11) составляет менее 0,3%. Результаты представлены на рис. 1, откуда видно, что при увеличении параметров  $M$  и  $\Lambda$  значение  $Re_{кр}$  увеличивается. Это обусловлено тем, что при увеличении параметров  $M$  и  $\Lambda$  профиль скорости становится более заполненным и это, в соответствии со второй теоремой Релея об устойчивости движения потока [4] ведет к стабилизации течения и к возрастанию значения критического числа Рейнольдса.

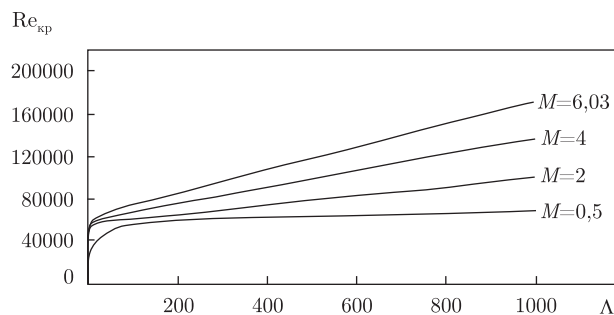


Рис. 1. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметров  $M$  и  $\Lambda$

Уравнение (6) не подтверждает теорему Сквайра [4] о том, что двумерные возмущения являются более опасными для устойчивости течения, чем трехмерные. Однако проведенные численные расчеты показали, что результаты, полученные на основе трехмерных возмущений, близки к аналогичным результатам, полученным на основе двумерных возмущений.

Таким образом, в данной работе выведено уравнение движения для трехмерных возмущений, которое позволяет определить критерии устойчивости течения в макропористой среде. На основе решения задачи на собственные значения методом коллокаций получено зависимость  $Re_{кр} = f(M, \Lambda)$ . Расчеты показали, что при увеличении параметров  $M$  и  $\Lambda$  увеличивается область перехода к турбулентному режиму. Полученные результаты позволяют адекватно выбрать модель для расчета течения теплоносителя в каналах ядерных реакторов с шаровой засыпкой.

1. Богдавленский Р. Г. Гидродинамика и теплообмен в высокотемпературных ядерных реакторах с шаровыми ТВЭЛАми. – Москва: Атомиздат, 1978. – 111 с.
2. Nield D. A., Bejan A. Convection in porous media. 3rd ed. – New York: Springer, 2006. – 640 p.
3. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., Basok B. I., Blinov D. G. Investigation of stability of a laminar flow in parallel-plate channel filled with a fluid saturated porous medium // Physics of Fluids. – 2005. – **17**. – 094102.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1956. – 528 с.
5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – Москва: Мир, 1988. – 352 с.

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев      Поступило в редакцию 08.10.2009  
 Университет Северной Каролины, США

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Avramenko, N. P. Dmitrenko,**  
 Corresponding Member of the NAS of Ukraine **B. I. Basok, A. V. Kuznetsov,**  
**D. G. Blinov**

### Hydrodynamic instability of a flow in channels of nuclear power plants with ball backing

*On the basis of the method of linear disturbances, a three-dimensional equation for the determination of the hydrodynamic instability in the active zone of nuclear reactors with spherical fuel elements is obtained. This equation is obtained under the assumption that the setting of channel can be represented as a macroporous medium. The investigation of this equation for eigenvalues by the collocation method allowed us to determine a criterion of the hydrodynamic instability as a function of linear and nonlinear constituents of porous hydrodynamic resistance.*