УДК 519.21

© 2010

Академик НАН Украины **В. С. Королюк**

Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии

Експоненційний генератор великих відхилень обчислюється для випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії.

Марковская случайная эволюция с независимыми приращениями задается соотношением [1, гл. 2]:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t C(x(s))\,ds + \int\limits_0^t \eta(ds; x(s)), \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Марковский процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в стандартном (польском) фазовом пространстве состояний $(E, \mathcal{E})$ задается генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_E [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, dy), \qquad x \in E, \tag{2}$$

на банаховом пространстве $\mathcal{B}(E)$ вещественнозначных ограниченных тест-функциях $\varphi(x)$ с sup-нормой:

$$\|\varphi\| := \sup_{x \in E} |\varphi(x)|.$$

Марковские процессы с независимыми приращениями $\eta(t; x)$, $t \geqslant 0$, $x \in E$, со значениями в эвклидовом пространстве R^d, $d \geqslant 1$, задаются генераторами

$$\mathrm{I\!\Gamma}(x)\varphi(u) = \int\limits_{R^d} [\varphi(u + z) - \varphi(u)] \Gamma(dz; x), \qquad x \in E, \qquad u \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

на тест-функциях $\varphi(u) \in \mathcal{B}(R^d)$.

Меры Леви $\Gamma(dz; x)$, $x \in E$, удовлетворяют условию существования экспоненциальных моментов равномерно по $x \in E$:

У1: $\sup\limits_{x \in E} \int\limits_{R^d} e^{pz} \Gamma(dz; x) \leqslant C < +\infty.$

Случайная эволюция $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, в марковской случайной среде $x(t)$, $t \geqslant 0$, характеризуется генератором двухкомпонентного марковского процесса $\xi(t)$, $x(t)$, $t \geqslant 0$:

$$\mathbb{L}\varphi(u, x) = Q\varphi(\cdot, x) + \mathrm{I\!\Gamma}(x)\varphi(u, \cdot) + C(x)\varphi'(u, \cdot).$$

Рассматривается проблема больших уклонений [2] для случайной эволюции (1)–(3) в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) при условии аппроксимации асимптотически малой диффузией.

Проблема больших уклонений. В монографии [2] проблема больших уклонений для случайных процессов изучается на базе мартингальной характеризации марковских процессов

$$\exp\left\{\varphi(\xi(t)) - \varphi(\xi_0) - \int\limits_0^t H\varphi(\xi(s))\,ds\right\} = \mu_t, \qquad t \geqslant 0.$$

Экспоненциальный генератор H задается соотношением:

$$H\varphi(u) = e^{-\varphi(u)}\mathbb{L}e^{\varphi(u)}.$$

Здесь $\mathbb{L}$ — генератор марковского процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$.

Проблема больших уклонений рассматривается в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$):

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u) \to H\varphi(u), \qquad \varphi^\varepsilon(u) \to \varphi(u), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{4}$$

Здесь (ср. [2, гл.1])

$$H^\varepsilon\varphi(u) := e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbb{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}. \tag{5}$$

Генераторы L^ε, $\varepsilon > 0$, задают марковские процессы в схеме серий $\xi^\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \to 0$.

Пример 1. Асимптотически малая диффузия задается процессом $\xi^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\sigma w(t)$, $t \geqslant 0$, где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс в R. Генераторы процессов $\xi^\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, задаются соотношением

$$L^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon\frac{1}{2}B\varphi''(u), \qquad B = \sigma^2, \qquad \varphi''(u) := \frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u^2}.$$

Экспоненциальный генератор асимптотически малой диффузии легко вычисляется

$$H^\varepsilon\varphi(u) = \frac{1}{2}B[\varphi'(u)]^2 + \varepsilon\frac{1}{2}B\varphi''(u).$$

Здесь $\varphi'(u) := \partial\varphi(u)/\partial u$.

Следовательно, проблема больших уклонений (4)–(5) для асимптотически малой диффузии реализуется оператором

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}B[\varphi'(u)]^2. \tag{6}$$

Случайные эволюции с независимыми приращениями. Проблема больших уклонений для случайных эволюций с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии рассматривается в схеме серий в нормировке, предложенной в работе [3]:

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t C^\varepsilon\left(x\left(\frac{s}{\varepsilon^3}\right)\right)ds + \int\limits_0^t \eta^\varepsilon\left(ds; x\left(\frac{s}{\varepsilon^3}\right)\right). \tag{7}$$

Основное предположение:

У2: Марковский процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, равномерно эргодический [1, гл. 1, 5] со стационарным распределением $\pi(A)$, $A \in \mathcal{E}$.

Процессы с независимыми приращениями в схеме серий $\eta^{\varepsilon}(t; x)$, $t \geqslant 0$, $x \in E$, $\varepsilon \to 0$, задаются генераторами

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-3} \int\limits_R [\varphi(u + \varepsilon^2 z) - \varphi(u) - \varepsilon^2 z \varphi'(u)] \Gamma^{\varepsilon}(dz; x) \\ &\Gamma^{\varepsilon}(dz; x) = \Gamma(dz; x) + \varepsilon \Gamma_1(dz; x). \end{aligned} \tag{8}$$

Скорость непрерывной компоненты

$$\begin{aligned} &C^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} C(x) + C_1(x), \qquad C(x) = a(x) + \widetilde{b}(x), \qquad C_1(x) = a_1(x) + b_1(x), \\ &\widetilde{b}(x) := b(x) - b, \qquad b(x) = \int\limits_R z \Gamma(dz; x), \qquad b_1(x) = \int\limits_R z \Gamma_1(dz; x), \\ &b = \int\limits_E \pi(dx) b(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Кроме того выполняется условие баланса:

У3: $\int\limits_E \pi(dx) a(x) = 0.$

Случайные эволюции (7)–(9) задаются генератором в схеме серий

$$\begin{aligned} &\mathbb{L}^{\varepsilon}\varphi(u, x) = [\varepsilon^{-3} Q + \mathbb{C}^{\varepsilon}(x) + \mathbb{\Gamma}^{\varepsilon}(x)]\varphi(u, x), \\ &\mathbb{C}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) := C^{\varepsilon}(x)\varphi'(u). \end{aligned} \tag{10}$$

Замечание 1. Случайные эволюции (7)–(9) рассматриваются на числовой оси $R = (-\infty, +\infty)$, что не уменьшает общности (см. Замечание 4).

Теорема. *Проблема больших уклонений для случайных эволюций* (7)–(9) *при выполнении условий* **У1**–**У3** *реализуется экспоненциальным генератором малой диффузии со сносом:*

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2} B [\varphi'(u)]^2 + C_1 \varphi'(u), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &B = \int\limits_E \pi(dx) B(x), \qquad B(x) = B_1(x) + B_2(x) + B_3(x), \\ &B_1(x) = \int\limits_R z^2 \Gamma(dz; x), \qquad B_2(x) = 2\widetilde{b}(x) R_0 \widetilde{b}(x), \\ &B_3(x) = 2a(x) R_0 a(x), \qquad C_1 = \int\limits_E \pi(dx) C_1(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Потенциальный оператор R_0 [1, Гл. 5] задается соотношениями

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I, \qquad \Pi\varphi(x) = \int\limits_E \pi(dx)\varphi(x).$$

Замечание 2. Коэффициент вариации B вместе со вторыми моментами $B_1(x)$ определяется также флюктуациями первых моментов скачков $\widetilde{b}(x)$ и скорости непрерывной компоненты $a(x)$.

Замечание 3. Используя алгоритм решения проблемы сингулярного возмущения для оператора (10), приведенный в [1, гл. 5], можно убедиться, что имеет место асимптотическое представление

$$\mathbb{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \varepsilon \frac{1}{2} B \varphi''(u) + C_1 \varphi'(u) + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Так что случайные эволюции (7)–(9) аппроксимируются асимптотически малой диффузией со сносом.

Утверждение теоремы основано на асимптотическом представлении экспоненциального генератора случайной эволюции (7)–(9)

$$H^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = e^{-\varphi^\varepsilon/\varepsilon} \varepsilon L^\varepsilon e^{\varphi^\varepsilon/\varepsilon} \tag{13}$$

на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln[1 + \varepsilon \varphi_1(u,x) + \varepsilon^2 \varphi_2(u,x)]. \tag{14}$$

Лемма. *Экспоненциальный генератор* (13) *на возмущенных тест-функциях* (14) *допускает асимптотическое представление*

$$H^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + C(x)\varphi'(u)] + \left[Q\varphi_2 - \varphi_1 Q \varphi_1 + C_1(x)\varphi'(u) + \frac{1}{2} B_1(x)[\varphi'(u)]^2\right] + {}$$
$$+ h^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

с пренебрежимым членом

$$|h^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad \varphi(u) \in C^3(R).$$

Далее, решение проблем сингулярного возмущения [1, гл. 5]

$$Q\varphi_1 + C(x)\varphi'(u) = 0, \qquad \Pi C(x) = 0;$$
$$Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + C_1(x)\varphi'(u) + \frac{1}{2} B_1(x)[\varphi'(u)]^2 = H\varphi(u)$$

приводит к соотношению

$$H^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = H\varphi(u) + h^\varepsilon(x)\varphi(u),$$

в котором предельный экспоненциальный генератор H задается соотношениями (11)–(12).

Замечание 4. В эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, экспоненциальный генератор (11) задается квадратичной формой с линейной частью:

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^{d} B_{kr} \varphi'_k(u) \varphi'_r(u) + \sum_{k=1}^{d} C_k \varphi'_k(u),$$

$B = [B_{kr}; 1 \leqslant k, r \leqslant d]$ — матрица вариаций; $C = (C_k, 1 \leqslant k \leqslant d)$ — вектор сноса, $\varphi'_k(u) := = \partial\varphi(u)/\partial u_k,\ 1 \leqslant k \leqslant d$.

Замечание 5. Компонента сноса в экспоненциальном генераторе (11) исчезает при выполнении условий

$$C_1(x) \equiv 0, \qquad \Gamma_1(dz; x) \equiv 0.$$

1. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Singapore: World Scientific, 2005. – 348 p.
2. *Feng J., Kurtz T. G.* Large deviations for stochastic processes // Mathematical Surveys and Monographs. – Vol. 131. – Providence, RI: AMS, 2006. – 412 p.
3. *Mogulskii A. A.* Large deviation for processes with independent increments // Ann. Prob. – 1993. – **21**. – P. 202–215.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 13.04.2010

Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Koroliuk**

Markov random evolutions with independent increments in the asymptotically small diffusion scheme

An exponential generator of large deviations for random evolutions with independent increments is calculated in the asymptotically small diffusion scheme.