Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2011

МЕХАНІКА

УДК 539.3

В. А. Галазюк, член-кореспондент НАН України **Г. С. Кіт**

Осесиметричний напружено-деформований стан у тілі з плоскою пеленою теплових джерел або диполів

Визначення стаціонарного темпертурного поля в тілі з пеленою теплових джерел або диполів зведено до інтегральних рівнянь першого роду і запропоновано метод знаходження множини їх розв'язків. За відомим температурним полем і рівняннями термопружності в переміщеннях знайдені компоненти вектора пружного переміщення та компоненти тензора температурних напружень.

У класичній постановці задач стаціонарої теплопровідності з теплоактивними або теплоізольованими включеннями [1] постулюється наявність джерел тепла або теплових диполів тільки в області включення, а це призводить до сингулярного розподілу теплових потоків на його краю.

Нижче запропонована нова постановка і метод розв'язування осесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тонкими теплоактивним або теплоізольованим включеннями. Локалізовані тонкі плоскі неоднорідності в межах цієї постановки моделюються пеленою теплових джерел або диполів, а зумовлене ними температурне поле визначається розв'язками інтегральних рівнянь першого роду. При додаткових некласичних умовах серед множини розв'язків цих рівнянь завжди існує розв'язок, який виконує фізично зумовлену вимогу неперервності теплових потоків на краю неоднорідності.

Фундаментальна система розв'язків рівнянь термопружності з плоскою пеленою джерел тепла. В однорідному ізотропному пружному просторі введемо циліндричну систему координат $r = R\alpha$, β, $z = R\gamma$ з початком у площині $\gamma = 0$, де R — деякий характерний лінійний розмір (радіус включення). Під дією осесиметричного температурного поля у просторі реалізується осесиметричний відносно осі γ напружено-деформований стан. У цьому випадку векторне рівняння [2] квазістатичної термопружності

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,T$$

у циліндричній системі координат зводиться до двох рівнянь в частинних похідних

$$\begin{aligned} &k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = \alpha_T(3k^2 - 4)\partial_\alpha T,\\ &k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = \alpha_T(3k^2 - 4)\partial_\gamma T \end{aligned} \qquad (1)$$

стосовно інваріантних величин

$$\begin{aligned} &\theta(\alpha,\gamma) = \operatorname{div}\mathbf{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma, \\ &2\omega_\beta(\alpha,\gamma) = \operatorname{rot}\mathbf{u}_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $k^2 = (\lambda+2\mu)/\mu = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де λ і μ — сталі Ламе; ν — коефіцієнт Пуассона; α_T — коефіцієнт лінійного теплового розширення; Ru_α, Ru_γ — компоненти вектора пружного переміщення $\mathbf{u}$ в напрямку осей α і γ, відповідно; ∂_α, ∂_γ — оператори диференціювання за α, γ.

З урахуванням виразів (2) система рівнянь (1) розпадається на два незалежні рівняння

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha\theta) + \partial_\gamma^2\theta = \alpha_T k^{-2}(3k^2-4)[\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\gamma^2 T], \tag{3}$$

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha u_\gamma) + \partial_\gamma^2 u_\gamma = -(k^2-1)\partial_\gamma\theta + \alpha_T(3k^2-4)\partial_\gamma T \tag{4}$$

відносно ключових функцій $\theta(\alpha,\gamma)$, $u_\gamma(\alpha,\gamma)$.

Нехай у площині $\gamma = 0$ джерела тепла розподілені за законом

$$W(\alpha,p) = T_0\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta, \tag{5}$$

де $H(\eta,p)$ — твірна функція з параметром $p>0$; $J_0(\eta\alpha)$ — функція Бесселя першого роду; T_0 — множник із розмірністю температури. Тоді температурне поле визначиться розв'язком рівняння стаціонарної теплопровідності з пеленою джерел тепла

$$\Delta T(\alpha,\gamma) = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\gamma^2 T = 2T_0\delta(\gamma)\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta,$$

де $\delta(\gamma)$ — дельта-функція Дірака, і буде таким:

$$T(\alpha,\gamma) = T_0\int_0^\infty \eta H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta. \tag{6}$$

Цей результат при фіксованому p збігається з наведеним у роботі [3]. Відзначимо, що похідна

$$\partial_\gamma T = -T_0\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta$$

має стрибок при переході площини $\gamma = 0$, а тому, за означенням [4], ця площина є матеріальною поверхнею розриву параметрів поля першого порядку — внутрішнім тепловим шаром (internal thermal layer).

Якщо температурне поле (6) підставити в диференціальне рівняння (3), то для визначення температурної об'ємної деформації $\theta^T(\alpha,\gamma)$ одержимо рівняння Пуассона

$$\Delta\theta^T(\alpha,\gamma) = 2\beta_T T_0\delta(\gamma)\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta,$$

розв'язком якого є функція

$$\theta^T(\alpha,\gamma) = \beta_T T(\alpha,\gamma), \qquad \beta_T = \alpha_T k^{-2}(3k^2-4) = \alpha_T \frac{1+\nu}{1-\nu}, \tag{7}$$

у чому легко переконатися, якщо врахувати значення похідної $(\operatorname{sign}\gamma)' = 2\delta(\gamma)$. За відомою функцією $\theta^T(\alpha,\gamma)$, диференціальне рівняння (4) відносно компоненти $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ набуде вигляду

$$\Delta u_\gamma^T(\alpha,\gamma) \equiv -\beta_T T_0 \operatorname{sign}\gamma \int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_0(\eta\alpha) e^{-\eta|\gamma|} d\eta$$

і його розв'язок

$$u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = 0{,}5\beta_T \gamma T(\alpha,\gamma). \tag{8}$$

Якщо ввести функцію $P^T(\alpha,\gamma)$ таку, що $u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma)$, то перше рівняння (2) матиме вигляд

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha P^T) = \theta^T(\alpha,\gamma) - \partial_\gamma u_\gamma^T, \tag{9}$$

і його, з урахуванням (7) та (8), запишемо таким чином:

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha P^T) = 0{,}5\beta_T T_0 \int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)(1+\eta|\gamma|) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta.$$

Розв'язок цього неоднорідного рівняння такий:

$$P^T(\alpha,\gamma) = -0{,}5\beta_T T_0 \int\limits_0^\infty \eta^{-1} H(\eta,p)(1+\eta|\gamma|) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta.$$

Відзначимо, що функція $P^T(\alpha,\gamma)$ є відомим [2] термопружним потенціалом переміщень в циліндричній системі координат, оскільки

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma), \qquad u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = \partial_\gamma P^T(\alpha,\gamma).$$

За функцією $P^T(\alpha,\gamma)$ знайдемо радіальну компоненту $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ вектора $\mathbf{u}$

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = 0{,}5\beta_T T_0 \int\limits_0^\infty H(\eta,p)(1+\eta|\gamma|) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\, d\eta. \tag{10}$$

Отже, пелена джерел тепла, розподілених у площині $\gamma = 0$ за законом (5), викликає у тілі симетричне відносно цієї площини радіальне поле переміщень $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ за законом (10) і антисиметричне поле переміщень $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ за законом (8), що цілком узгоджується з фізикою явища.

За відомими компонентами $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ та $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ і співвідношеннями Дюамеля–Неймана можна знайти всі характеристики напружено-деформованого стану у тілі. Зокрема,

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T\mu\left[T(\alpha,\gamma) + T_0|\gamma|\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta\right],$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma) = -0{,}5\beta_T\mu\left[3T(\alpha,\gamma) + T_0\int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)(1+\eta|\gamma|)e^{-\eta|\gamma|}J_2(\eta\alpha)\,d\eta - \right.$$
$$\left. - T_0|\gamma|\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta\right], \tag{11}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\gamma) = (3\lambda+2\mu)\beta_T T(\alpha,\gamma) - [\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) + \sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma)],$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T\mu\gamma T_0\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_1(\eta\alpha)\,d\eta. \tag{12}$$

Таким чином, при існуванні у площині $\gamma = 0$ пелени джерел тепла, згідно з (11) і (12), у цій площині $\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,0) = -\beta_T\mu T(\alpha,0)$ і $\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,0) = 0$.

Фундаментальна система розв'язків рівнянь термопружності з плоскою пеленою теплових диполів. Нехай у площині $\gamma = 0$ розподілені теплові диполі за законом

$$D(\alpha,p) = T_0\int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta \tag{13}$$

з твірною функцією $H(\eta,p)$ і параметром $p > 0$. Тоді температурне поле у тілі визначається із рівняння стаціонарної теплопровідності з пеленою теплових диполів

$$\Delta T(\alpha,\gamma) = -2T_0\delta'(\gamma)\int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta,$$

де $\delta'(\gamma)$ — похідна від дельта-функції Дірака, і є таким:

$$T(\alpha,\gamma) = T_0\,\mathrm{sign}\,\gamma\int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta. \tag{14}$$

Отже, пелена теплових диполів зумовлює стрибкову зміну температури при переході площини $\gamma = 0$, про що свідчить наявність у законі розподілу (14) функції стрибка $\mathrm{sign}\,\gamma$. Тому, за означенням [4], площина $\gamma = 0$ є матеріальною поверхнею розриву параметрів поля нульового порядку — внутрішнім тепловим вихором (internal thermal vortex). Дійсно, у цьому випадку обчислена за поданням (14) складова безрозмірного вектора $\mathbf{q}^* = R\mathbf{q}/\lambda T_0$ вздовж осі α

$$T_0 q_\alpha^*(\alpha,\gamma) = -\partial_\alpha T = T_0\,\mathrm{sign}\,\gamma\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_1(\eta\alpha)\,d\eta$$

і, відповідно до рівняння балансу $\operatorname{div}\mathbf{q}^* = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha q_\alpha^*) + \partial_\gamma q_\gamma^* = 0$, його складова вздовж осі γ є такою:

$$T_0 q_\gamma^*(\alpha,\gamma) = T_0 \int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta. \tag{15}$$

Тому пелена диполів у площині $\gamma = 0$ зумовлює виникнення пелени теплових вихорів із складовою

$$(\operatorname{rot}\mathbf{q}^*)_\beta = (\partial_\gamma q_\alpha^* - \partial_\alpha q_\gamma^*) = 2\delta(\gamma) \int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\, d\eta$$

і, отже, при існуванні у площині $\gamma = 0$ вихорової складової вектора теплового потоку $\mathbf{q}^*$ класичний закон теплопровідності Фур'є $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ не має місця, оскільки складова $q_\gamma^*(\alpha,\gamma)$ (15) ним не визначається.

Якщо закон розподілу температурного поля (14) підставити в диференціальне рівняння (3), то для визначення температурної об'ємної деформації $\theta^T(\alpha,\gamma)$ одержимо рівняння Пуассона

$$\Delta\theta^T(\alpha,\gamma) = 2\beta_T T_0 \delta'(\gamma) \int\limits_0^\infty \eta H(\eta\alpha) J_0(\eta\alpha)\, d\eta,$$

розв'язком якого є функція (7). За відомою функцією $\theta^T(\alpha,\gamma)$, диференціальне рівняння (4) відносно температурної компоненти $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ набуде вигляду

$$\Delta u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = 2\beta_T T_0 \left\{ 2\delta(\gamma) \int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta - \int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta \right\}$$

і його розв'язок

$$u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = 0{,}5\beta_T \left\{ \gamma T(\alpha,\gamma) - T_0 \int\limits_0^\infty H(\eta,p)^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta \right\}. \tag{16}$$

З урахуванням подань (7) та (16) диференціальне рівняння (9) відносно ключової функції $P^T(\alpha,\gamma)$ стане таким:

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha P^T) = 0{,}5\beta_T T_0 \gamma \int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta$$

і його розв'язок

$$P^T(\alpha,\gamma) = -0{,}5\beta_T T_0 \gamma \int\limits_0^\infty H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta.$$

Оскільки $u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma)$, то радіальна температурна компонента вектора $\mathbf{u}$

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = 0{,}5\beta_T T_0 \gamma \int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\, d\eta \tag{17}$$

і $u_\alpha^T(\alpha,0) = 0$, тобто радіальні температурні переміщення у площині $\gamma = 0$ відсутні.

За відомими компонентами $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ (16) і $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ (17) та співвідношеннями Дюамеля–Неймана знайдемо всі характеристики напруженого стану в тілі, зумовленого температурним полем (14). Зокрема,

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T \mu T_0 \gamma \int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta, \\
&\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T \mu \left\{ 2T(\alpha,\gamma) - T_0\gamma \int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} [J_0(\eta\alpha) - J_2(\eta\alpha)] d\eta \right\}, \\
&\sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\gamma) = (3\lambda + 2\mu)\beta_T T(\alpha,\gamma) - [\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma) + \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma)], \\
&\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\gamma) = \beta_T \mu \int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)(1 - \eta|\gamma|) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\, d\eta.
\end{aligned} \tag{18}$$

Отже, при існуванні у площині $\gamma = 0$ пелени теплових диполів, розподілених за законом (13), нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma)$, відповідно до подання (18), дорівнює нулю у площині $\gamma = 0$, а нормальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma)$ і $\sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\gamma)$ мають стрибок при переході цієї площини вздовж нормалі. Цей стрибок зумовлений стрибком температурного поля (14). Таким чином, з механічного погляду, за означенням [4], площина $\gamma = 0$ є матеріальною поверхнею розриву характеристик напружено-деформованого стану першого порядку — внутрішнім межовим шаром (internal boundary layer).

Відзначимо, що вирази для переміщень (8), (10), (16) і (17) та напружень (11) (12) і (18) збігаються з наведеними у роботі [1], які одержані методом теорії гармонічних потенціалів простого і подвійного шарів та термопружних потенціалів переміщень.

1. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.
2. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
3. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Наука, 1975. – 592 с.

Львівський національний університет
ім. Івана Франка
Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 30.12.2010

V. A. Halazyuk, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **H. S. Kit**

The axisymmetric stress-strain state of a body with a plane sheet of thermal sources or dipoles

The determination of the stationary temperature field in a body with a plane sheet of thermal sources or dipoles is reduced to the solution of an integral equation of the first type. The method of determination of the set of solutions of this equation is proposed. The components of the elastic displacement vector and the components of the temperature stress tensor are found with regard for the known temperature field and thermoelasticity equations.