

И. А. Лоза

Неосесимметричные колебания полого неоднородного шара с пьезокерамическими слоями

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Розглядається задача про власні неосесиметричні коливання неоднорідних за товщиною порожнистих куль з шарами, поляризованими у радіальному напрямі. Для розв'язання цієї задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Початкова задача теорії електропружності в частинних похідних зводиться до крайової задачі на власні значення у звичайних диференціальних рівняннях за допомогою розвинення компонент тензора напружень, векторів переміщень електричної індукції та електростатичного потенціалу у ряди за сферичними функціями. Отримана задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрового пошуку. Наведено результати чисельного аналізу частот власних коливань в широкому діапазоні зміни геометричних характеристик шаруватих куль з п'єзокерамічними шарами.

Пьезокерамические элементы сферической формы имеют широкое распространение в технике, например, в гидроакустике. Поэтому понятен интерес к исследованию динамических процессов, происходящих в пьезокерамических телах сферической формы. Решение задачи о собственных электроупругих колебаниях толстостенного пьезокерамического шара связано со значительными математическими трудностями. В основном рассматривались одномерные задачи [1–5]. Для решения задач об осесимметричных вынужденных колебаниях при механическом способе возбуждения колебаний в работе [6] использовался метод обобщенных степенных рядов. В работах [7, 8] для решения задачи о собственных осесимметричных колебаниях и радиальных колебаниях, соответственно, применялся метод степенных рядов. В работе [9], с применением этого же метода, решена задача о вынужденных осесимметричных колебаниях полого пьезокерамического шара при электрическом способе возбуждения его поверхностей. Для слоистых шаров, кроме удовлетворения решений на ограничивающих тело поверхностях, необходимо также удовлетворять условиям сопряжения, что приводит к повышению порядка систем уравнений. В работе [10] рассмотрена статическая неосесимметричная задача о напряженно-деформированном состоянии слоистой сферы из пьезокерамических слоев при механическом способе возбуждения. Для упрощения решения задачи был разработан метод разделения переменных сначала для упругих трансверсально изотропных шаров [11–13], а затем и для пьезокерамических [14]. Для решения задачи, рассматриваемой ниже, предлагается использовать эффективный численно-аналитический подход, с успехом применявшийся для решения аналогичных задач для упругих тел [11, 12].

Материальные соотношения для радиально поляризованной пьезокерамической среды в сферической системе координат (r, θ, φ) запишем в виде [10, 15]:

$$\Sigma_{\theta\theta} = r\sigma_{\theta\theta} = c_{11}S_{\theta\theta} + c_{12}S_{\varphi\varphi} + c_{13}S_{rr} + e_{31}\nabla_2\Phi,$$

$$\Sigma_{\varphi\varphi} = r\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}S_{\theta\theta} + c_{11}S_{\varphi\varphi} + c_{13}S_{rr} + e_{31}\nabla_2\Phi,$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{rr} = r\sigma_{rr} &= c_{13}S_{\theta\theta} + c_{13}S_{\varphi\varphi} + c_{33}S_{rr} + e_{33}\nabla_2\Phi, \\
\Sigma_{r\theta} = r\sigma_{r\theta} &= 2c_{44}S_{r\theta} + e_{15}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad \Sigma_{r\varphi} = r\sigma_{r\varphi} = 2c_{44}S_{r\varphi} + \frac{e_{15}}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \\
\Sigma_{\theta\varphi} = r\sigma_{\theta\varphi} &= 2c_{66}S_{\theta\varphi}, \quad \Delta_\theta = rD_\theta = 2e_{15}S_{r\theta} - \varepsilon_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \\
\Delta_\varphi = rD_\varphi &= 2e_{15}S_{r\varphi} - \frac{\varepsilon_{11}}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \quad \Delta_r = rD_r = e_{31}S_{\theta\theta} + e_{31}S_{\varphi\varphi} + e_{33}S_{rr} - \varepsilon_{33}\nabla_2\Phi,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\nabla_2 = r\partial/\partial r$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; Φ и D_i — электростатический потенциал и компоненты вектора электрической индукции, соответственно; c_{ij} — упругие постоянные при постоянной электрической напряженности; e_{ij} — пьезомодули; ε_{ij} — диэлектрические постоянные при постоянной деформации. S_{ij} определены как

$$\begin{aligned}
S_{rr} = rs_{rr} &= \nabla_2u_r, S_{\theta\theta} = rs_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r, \quad S_{\varphi\varphi} = rs_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r + u_\theta \operatorname{ctg}\theta, \\
2S_{r\theta} = 2rs_{r\theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \nabla_2u_\theta - u_\theta, \quad 2S_{r\varphi} = 2rs_{r\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \nabla_2u_\varphi - u_\varphi, \\
2S_{\theta\varphi} = 2rs_{\theta\varphi} &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} - u_\varphi \operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь s_{ij} — компоненты тензора деформаций; u_i ($i = r, \theta, \varphi$) — компоненты вектора перемещений. При введенных обозначениях уравнения движения могут быть записаны таким образом:

$$\begin{aligned}
\nabla_2\Sigma_{r\theta} + \operatorname{csc}\theta\frac{\partial\Sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\Sigma_{r\theta} + (\Sigma_{\theta\theta} - \Sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta &= \rho r^2\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \\
\nabla_2\Sigma_{r\varphi} + \operatorname{csc}\theta\frac{\partial\Sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + 2\Sigma_{r\varphi} + 2\Sigma_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta &= \rho r^2\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \\
\nabla_2\Sigma_{rr} + \operatorname{csc}\theta\frac{\partial\Sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \Sigma_{rr} - \Sigma_{\theta\theta} - \Sigma_{\varphi\varphi} + \Sigma_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta &= \rho r^2\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение электростатики запишется в виде:

$$\nabla_2\Delta_r + \Delta_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta_\theta \sin\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Delta_\varphi}{\partial\theta} = 0. \tag{4}$$

Следуя работам [10, 14], выражаем тангенциальные перемещения u_θ и u_φ через новые неизвестные функции u_1 u_2

$$u_\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial\theta}, \quad u_\varphi = \frac{\partial u_1}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_2}{\partial\varphi}, \quad u_r = w. \tag{5}$$

Тогда из соотношений (1) и (2) для $\Sigma_{r\theta}$, $\Sigma_{r\varphi}$ получим соотношения, аналогичные (5):

$$\Sigma_{r\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Sigma_2}{\partial\theta}, \quad \Sigma_{r\varphi} = \frac{\partial\Sigma_1}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\varphi}, \tag{6}$$

где Σ_1 и Σ_2 — новые неизвестные функции напряжения.

Учитывая соотношения (5) и (6), а также тот факт, что рассматриваются гармонические колебания, два первых уравнения системы (3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla_2 \Sigma_2 + 2\Sigma_2 + (c_{11} \nabla_1^2 + 2c_{66} - \rho r^2 \omega^2) u_2 - (c_{11} + c_{12}) w - c_{13} \nabla_2 w - e_{13} \nabla_2 \Phi] + \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\nabla_2 \Sigma_1 + 2\Sigma_1 + (c_{66} (\nabla_1^2 + 2) - \rho r^2 \omega^2) u_1] = 0, \\ & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\nabla_2 \Sigma_2 + 2\Sigma_2 + (c_{11} \nabla_1^2 + 2c_{66} - \rho r^2 \omega^2) u_2 - (c_{11} + c_{12}) w - c_{13} \nabla_2 w - e_{13} \nabla_2 \Phi] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla_2 \Sigma_1 + 2\Sigma_1 + (c_{66} (\nabla_1^2 + 2) - \rho r^2 \omega^2) u_1] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\nabla_1^2 = \partial^2 / \partial \theta^2 + \text{ctg}(\theta) \partial / \partial \theta + \partial^2 / \partial \varphi^2$, ω — круговая частота.

Из уравнений (7) получаем:

$$\begin{aligned} & \nabla_2 \Sigma_2 + 2\Sigma_2 + (c_{11} \nabla_1^2 + 2c_{66} - \rho r^2 \omega^2) u_2 - (c_{11} + c_{12}) w - c_{13} \nabla_2 w - e_{13} \nabla_2 \Phi = 0, \\ & \nabla_2 \Sigma_1 + 2\Sigma_1 + (c_{66} (\nabla_1^2 + 2) - \rho r^2 \omega^2) u_1 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Третье уравнение из (3) и уравнение (4) дают

$$\begin{aligned} & \nabla_2 \Sigma_{rr} + \Sigma_{rr} - \nabla_1^2 \Sigma_2 + (c_{11} + c_{12}) \nabla_1^2 u_2 - (2(c_{11} + c_{12}) + 2c_{13} \nabla_2 + \rho r^2 \omega^2) w - \\ & - 2e_{13} \nabla_2 \Phi = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla_2 \Delta_r + \Delta_r + e_{15} \nabla_1^2 w - \varepsilon_{11} \nabla_1^2 \Phi + e_{15} \nabla_1^2 (1 - \nabla_2) u_2 = 0.$$

Используя четвертое и пятое уравнения из (1) и соотношения (2), запишем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\Sigma_2 + c_{44} (1 - \nabla_2) u_2 + c_{44} w + e_{15} \Phi] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [c_{44} (1 - \nabla_2) u_1 + \Sigma_1] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Sigma_2 + c_{44} (1 - \nabla_2) u_2 + c_{44} w + e_{15} \Phi] - \frac{\partial}{\partial \theta} [c_{44} (1 - \nabla_2) u_1 + \Sigma_1] = 0. \quad (11)$$

Из уравнений (10) и (11) вытекает

$$\Sigma_2 + c_{44} (1 - \nabla_2) u_2 + c_{44} w + e_{15} \Phi = 0, \quad (12)$$

$$c_{44} (1 - \nabla_2) u_1 + \Sigma_1 = 0. \quad (13)$$

Из третьего и девятого уравнений (1) с использованием (2) получаем:

$$\Sigma_{rr} = -c_{13} \nabla_1^2 u_2 + c_{13} (2 + \nabla_2) w + e_{33} \nabla_2 \Phi, \quad (14)$$

$$\Delta_r = -e_{31} \nabla_1^2 u_2 + e_{13} (2 + \nabla_2) w - \varepsilon_{33} \nabla_2 \Phi. \quad (15)$$

Граничные условия на боковых поверхностях шара (при $r = R_0 \pm h$) задаются следующие.

Поверхности свободны от внешних усилий $\sigma_{rr}^1 = \sigma_{r\theta}^1 = \sigma_{r\varphi}^1 = \sigma_{rr}^N = \sigma_{r\theta}^N = \sigma_{r\varphi}^N = 0$ и покрыты электродами, которые закорочены, $\Phi^1 = \Phi^N = 0$. На поверхностях контакта

$r = r_i$ имеют место условия совместной работы i -го и $(i + 1)$ -го слоев без скольжения и отрыва и непрерывности электрического поля:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \sigma_{rr}^{i+1}; & \sigma_{r\theta}^i &= \sigma_{r\theta}^{i+1}; & \sigma_{r\varphi}^i &= \sigma_{r\varphi}^{i+1}; & \Phi^i &= \Phi^{i+1}; & u_r^i &= u_r^{i+1}; \\ u_\theta^i &= u_\theta^{i+1}; & u_\varphi^i &= u_\varphi^{i+1}; & D_r^i &= D_r^{i+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь h — половина толщины шара; R_0 — радиус срединной поверхности; r_1 — внутренний радиус сферы; r_N — внешний радиус сферы.

В дальнейшем верхний индекс i будем опускать. Выбираем в качестве основных неизвестных функции, через которые формулируются условия контакта смежных слоев и условия на ограничивающих тело поверхностях.

Перейдем к переменным $\sigma_{rr} = \Sigma_{rr}/r$, $\sigma_1 = \Sigma_1/r$, $\sigma_2 = \Sigma_2/r$, $D_r = \Delta_r/r$ и будем искать решение в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_1(r) S_n^m(\theta, \varphi); & \sigma_1 &= \lambda \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_2(r) S_n^m(\theta, \varphi), \\ \sigma_2 &= \lambda \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_3(r) S_n^m(\theta, \varphi); & \Phi &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_4(r) S_n^m(\theta, \varphi), \\ w &= h \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_5(r) S_n^m(\theta, \varphi); & u_1 &= h \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_6(r) S_n^m(\theta, \varphi), \\ u_2 &= h \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_7(r) S_n^m(\theta, \varphi); & D_r &= \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} U_8(r) S_n^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $S_n^m = P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ — сферические гармонические функции; $P_n^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра; $\lambda = 10^{10} \text{ H/m}^2$; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Выбор решения в виде (17) позволяет от исходной трехмерной задачи электроупругости в частных производных прийти к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях:

$$\frac{dU}{dx} = BU, \quad CU = 0, \quad DU = 0, \quad (18)$$

где матрицы B , C и D , соответственно, равны:

$$B = \begin{pmatrix} 2\tilde{\varepsilon}(\beta-1) & 0 & -\tilde{\varepsilon}l & 0 & -2\tilde{\varepsilon}^2\tilde{\delta}_1 - \Omega^2 & 0 & -\tilde{\varepsilon}^2\tilde{\delta}_1l & 2\tilde{\varepsilon}\tilde{\gamma} \\ 0 & -3\tilde{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\varepsilon}^2\tilde{c}_{66}(2+l) - \Omega^2 & 0 & 0 \\ \tilde{\varepsilon}\tilde{\beta} & 0 & -3\tilde{\varepsilon} & 0 & -\tilde{\varepsilon}^2\tilde{\delta}_1 & 0 & -\tilde{\varepsilon}^2(\tilde{\delta}_2l + \tilde{c}_{66}) - \Omega^2 & \tilde{\varepsilon}\tilde{\gamma} \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{\tilde{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & -2\tilde{\varepsilon}\tilde{\gamma} & 0 & -\tilde{\varepsilon}\tilde{\gamma}l & -\frac{\tilde{c}_{33}}{\tilde{\alpha}} \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{\tilde{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & -2\tilde{\varepsilon}\tilde{\beta} & 0 & -\tilde{\varepsilon}\beta l & \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{\tilde{\alpha}} \\ 0 & \frac{1}{\tilde{c}_{44}} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{c}_{44}} & \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}_{15}}{\tilde{c}_{44}} & \tilde{\varepsilon} & 0 & \tilde{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}_{15}l}{\tilde{c}_{44}} & -\tilde{\varepsilon}^2\tilde{\delta}_3l & 0 & 0 & 0 & -2\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

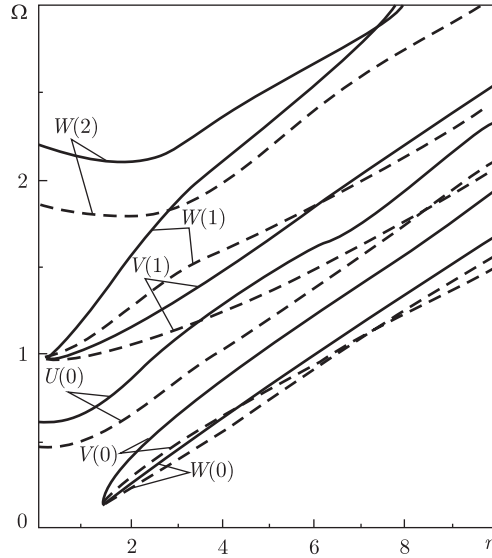


Рис. 1

$$C = D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь введены величины:

$$\alpha = c_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2, \quad \beta = \frac{c_{13}\varepsilon_{33} + e_{31}e_{33}}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{c_{13}e_{33} - c_{33}e_{31}}{\alpha},$$

$$\delta_1 = 2(c_{13}\beta + e_{31}\gamma) - (c_{11} + c_{12}), \quad \delta_2 = \frac{\delta_1}{2} - c_{66}, \quad \delta_3 = \varepsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{44}},$$

$$x = \frac{r - R_0}{h}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R_0}, \quad l = n(n+1), \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x}, \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}},$$

$$\tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0};$$

безразмерные величины $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}_i$ получаются из α , γ и δ_i путем замены входящих в них констант на безразмерные.

Ниже приведены результаты численного анализа краевой задачи (18). На рис. 1 представлена зависимость первых шести частот собственных колебаний от числа n . При этом $\varepsilon = 0,25$. Шар состоит из трех слоев. Толщина внешних слоев равна по $h/2$, толщина внутреннего слоя — h . Внешние слои — стальные с такими характеристиками:

$$E = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; \quad \nu = 0,28; \quad \rho_{\text{м}} = 7,85 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}.$$

Внутренний слой — пьезокерамика PZT 4 со следующими характеристиками:

$$c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; \quad c_{12} = 7,78 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; \quad c_{13} = 7,43 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; \quad c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2};$$

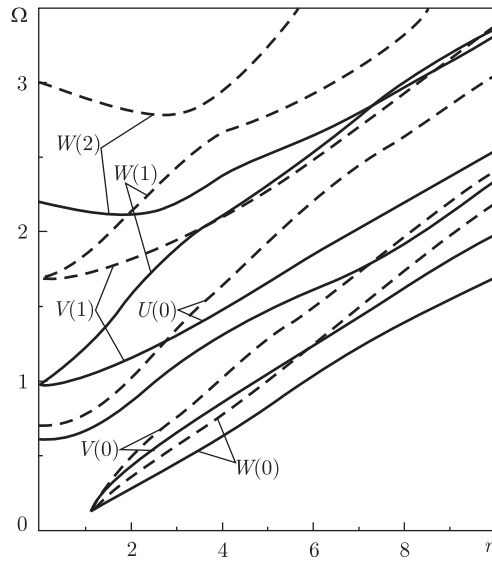


Рис. 2

$$c_{44} = 2,56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \quad e_{11} = 15,1 \frac{\text{К}}{\text{м}^2}; \quad e_{31} = -5,2 \frac{\text{К}}{\text{м}^2}; \quad e_{15} = 12,7 \frac{\text{К}}{\text{м}^2};$$

$$\varepsilon_{11} = 730; \quad \varepsilon_{33} = 635; \quad \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Для кривых введены обозначения, принятые в работе [7].

Поскольку собственная частота колебаний слоистого шара ограничена сверху соответствующей собственной частотой колебаний сплошного металлического шара, а снизу — собственной частотой колебаний сплошного пьезокерамического шара, для слоистого шара будем использовать аналогичные обозначения.

Сплошными линиями изображены значения собственных частот колебаний для слоистого шара, штриховыми — значения собственных частот колебаний однородного шара такой же толщины из пьезокерамики PZT 4. Из приведенного рисунка видно, что влияние наличия металлических слоев приводит к “ужесточению” материала, т. е. повышению значения собственных частот. При этом различие в первой собственной частоте для слоистого и однослойного шара незначительно.

На рис. 2 представлены результаты численного анализа задачи (18) для случая, аналогичного описанному выше, только теперь сплошными линиями также обозначены собственные частоты колебаний слоистого шара, а штриховой — собственные частоты колебаний однослойного стального шара. Как видно из рис. 2, в этом случае значения собственных частот колебаний слоистого шара меньше соответствующих частот колебаний стального шара. Следовательно, частота собственных колебаний слоистого шара лежит в некоем “коридоре” между собственной частотой колебаний однослойного шара из пьезокерамики и собственной частотой колебаний однослойного шара из стали. Это иллюстрирует рис. 3, где сплошной линией обозначены собственные частоты колебаний слоистого шара, штриховой — собственные частоты колебаний шара из пьезокерамики, штрихпунктирной — собственные частоты колебаний шара из стали. Материал и геометрия шара те же.

Учитывая тот факт, что толщина пьезокерамического слоя и суммарная толщина металлических слоев одинаковы, а собственные частоты для слоистого шара лежат в “коридоре”

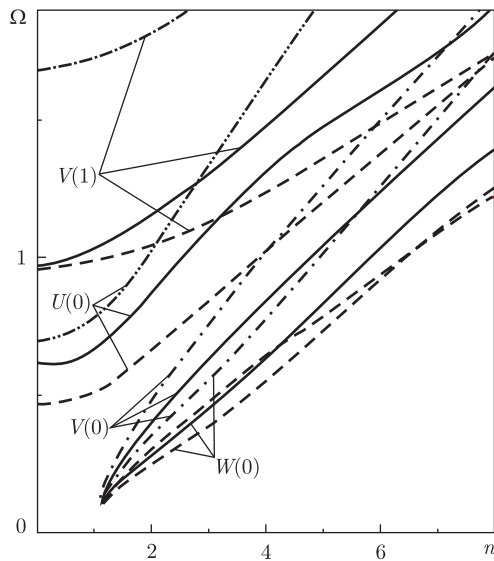


Рис. 3

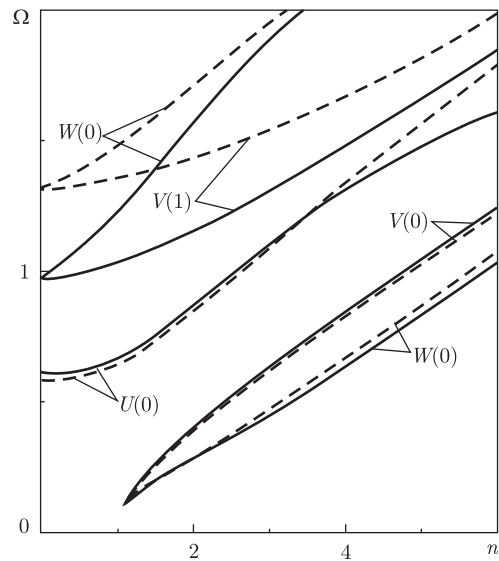


Рис. 4

из соответствующих однородных слоев, естественно предположить, что значения собственных частот колебаний слоистого шара можно приближенно определить как среднее арифметическое собственных частот колебаний соответствующих однородных. Это иллюстрирует рис. 4. Здесь сплошными линиями представлены значения собственных частот слоистого шара, а штриховой — среднее арифметическое значение для однородных шаров. Как видно из приведенного рисунка, в низкочастотной области (а именно там будут лежать первые собственные частоты) расхождение в частотах, полученных на основании такого предположения, будут небольшие. С ростом же частоты и увеличением числа n эти расхождения становятся весьма существенными.

1. Борисейко В. А., Улитко А. Ф. Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы // Тепл. напряжения в элементах конструкций. – 1971. – Вып. 11. – С. 86–89.
2. Борисейко В. А. Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы в сжимаемой жидкости // Там же. – 1972. – Вып. 12. – С. 111–114.
3. Лазуткин В. Н. Колебания полого пьезокерамического шара // Акуст. журн. – 1976. – **22**, № 3. – С. 393–396.
4. Chen W. Q., Ding H. J. Exact static analysis of rotating piezoelectric spherical shell // Acta Mechanica Sinica. – 1998. – **14**. – P. 257–265.
5. Kirichok I. F. Numerical solution of problem of the electrostatic oscillation of a cylinder and sphere // Soviet Appl. Mech. – 1980. – **16**, P. 117–121.
6. Борисейко В. А., Улитко А. Ф. Электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы // Тепл. напряжения в элементах конструкций. – 1974. – Вып. 14. – С. 121–126.
7. Лоза И. А., Шульга Н. А. Осесимметричные колебания пьезокерамического полого шара при радиальной поляризации // Акуст. журн. – 1984. – **20**, № 2. – С. 3–8.
8. Шульга Н. А. Радиальные электроупругие колебания пьезокерамического полого шара // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 8. – С. 20–25.
9. Лоза И. А., Шульга Н. А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамического полого шара при электрическом способе возбуждения // Акуст. журн. – 1990. – **26**, № 6. – С. 16–21.
10. Chen W. Q., Ding H. J., Xu R. Q. Three-dimensional static analysis of multi-layered piezoelectric hollow sphere via the state space method // Int. J. Solids and Structures. – 2001. – **38**, P. 4921–4936.
11. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.

12. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G.* Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basis of different models. – Київ: Академперіодика, 2009. – 549 с.
13. *Shul'ga N. A., Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* Free non-axisymmetric oscillations of thick-walled, non-homogeneous transversely isotropic hollow sphere // *Soviet Appl. Mech.* – 1988. – **24**. – P. 439–444.
14. *Шульга Н. А.* Об электроупругих колебаниях пьезокерамического шара с радиальной поляризацией // *Прикл. механика.* – 1986. – **22**, № 6. – С. 3–7.
15. *Chen W. Q.* Problems of radially polarized piezoelectric bodies // *Int. J. Solids and Structures.* – 1999. – **36**. – P. 4317–4332.

Національний транспортний університет, Київ

Поступило в редакцію 26.01.2011

I. A. Loza

Non-axisymmetric natural vibrations of a hollow inhomogeneous sphere with piezoceramic layers

The problem of nonaxisymmetric natural vibrations of a hollow multilayered sphere with piezoceramic layers polarized in the radial direction is considered. The numerical-analytical method is offered for solving this problem. The initial problem of electroelasticity theory with partial derivatives after expanding the components of the stress tensor, displacement vector, electric induction, and electrostatic potential in spherical functions is reduced to the boundary-value problem for the system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The problem is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization coupled with the incremental search method. The numerical results are presented for natural frequencies of vibrations in a wide range of the geometric characteristics of multilayered spheres.