Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

В. Г. Ваврички, Р. С. Хапко

Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності в частково необмежених областях на основі інтегральних рівнянь

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Розглядається задача Коші для рівняння теплопровідності, яка полягає у відновленні температурного поля на основі температури і теплового потоку на частині границі. Для одержання регуляризованого розв'язку застосовується метод типу Ландвебера, який поширюється на випадок частково необмежених областей. Для розв'язування прямих початково-крайових коректних задач, які виникають на кожній ітерації методу, пропонується метод граничних інтегральних рівнянь з використанням функцій Гріна та часткової дискретизації за часовою змінною. Ефективність і стійкість запропонованого методу підтверджується чисельними експериментами.

Постановка задачі. Нехай задано канонічну частково необмежену область $D_0 \subset R^2$ з границею Γ_0 і обмежену однозв'язну область $D_1 \subset D_0$ з достатньо гладкою границею Γ_1 (рис. 1). Нехай $D = D_0 \setminus \overline{D}_1$, $T > 0$, $c > 0$ — відомі константи і ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до відповідної границі. Розглядається задача Коші для рівняння теплопровідності, яка полягає у відновленні температурного поля за даними Коші на частині границі області

Рис. 1. Частково необмежена область з включенням

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{в} \quad D \times (0,T),\\
u = f_1 & \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 & \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T),\\
u(x,0) = 0 & \text{для} \quad x \in D,
\end{cases}
\tag{1}
$$

де f_1 і f_2 — відомі достатньо гладкі функції. Тут і надалі вважатимемо, що розв'язок рівняння теплопровідності має задовольняти умову регулярності на нескінченності $u(x,t) \to \to 0$, $|x| \to \infty$ рівномірно у всіх напрямках і для всіх $t \in (0,T)$.

Оскільки така задача є некоректною в сенсі відсутності стійкості розв'язку за вхідними даними, то її не можна розв'язати традиційними чисельними методами. Застосування стандартної регуляризації Тихонова приводить до зміни оператора задачі, натомість наведений в [1] ітераційний метод, який грунтується на методі Ландвебера, позбавлений цього недоліку. На кожній ітерації методу розв'язуються певні прямі початково-крайові задачі. В даній роботі ці ідеї поширюються на випадок частково необмежених областей з обмеженим включенням на площині. Зважаючи на те, що розглядається однорідне параболічне рівняння, використання інтегральних рівнянь дає можливість понизити розмірність відповідних початково-крайових задач. Спершу здійснюється часткова дискретизація нестаціонарної задачі методом Роте за часовою змінною [2, 3]. В результаті отримується послідовність стаціонарних еліптичних задач. Далі, шляхом побудови спеціальної послідовності функцій Гріна для еліптичних рівнянь, стаціонарні задачі у частково необмеженій області D редукуються до інтегральних рівнянь по границі включення Γ_1. Повна дискретизація методом квадратур [4] приводить до послідовності систем лінійних рівнянь з однаковою матрицею і рекурентними правими частинами.

Ітераційний метод. Поставимо за мету визначити $u|_{\Gamma_1 \times (0,T)}$. Переформулюємо задачу Коші у вигляді операторного рівняння, для цього введемо такі оператори. Оператор $K\colon L^2(\Gamma_1 \times (0,T)) \to L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ визначається як $K\eta := u|_{\Gamma_0 \times (0,T)}$, де u — розв'язок мішаної початково-крайової задачі

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{в} \quad D \times (0,T),\\
u = \eta & \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T),\\
u(x,0) = 0 & \text{для} \quad x \in D.
\end{cases}
$$

Також оператор $G\colon L^2(\Gamma_0 \times (0,T)) \to L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ визначається як $G\psi := u|_{\Gamma_0 \times (0,T)}$, де u — розв'язок такої мішаної початково-крайової задачі:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{в} \quad D \times (0,T),\\
u = 0 & \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T),\\
u(x,0) = 0 & \text{для} \quad x \in D.
\end{cases}
$$

Використовуючи формулу Гріна, можна показати, що спряжений оператор $K^*\colon L^2(\Gamma_0 \times \times (0,T)) \to L^2(\Gamma_1 \times (0,T))$ має вигляд $K^*\zeta = -\dfrac{\partial}{\partial\nu} v\Big|_{\Gamma_1\times(0,T)}$, де v визначається з мішаної початково-крайової задачі

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\Delta v & \text{в} \quad D \times (0,T), \\ v = 0 & \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \zeta & \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ v(x,T) = 0 & \text{для} \quad x \in D. \end{cases} \tag{2}$$

Таким чином, задача (1) еквівалентна операторному рівнянню $K\eta = f_1 - Gf_2$. Використовуючи подання оператора K через функцію Гріна для задачі Діріхле, аналогічно випадку обмежених областей [1, 5], можна показати, що він є компактний, як інтегральний оператор з неперервним ядром. Через те для розв'язання операторного рівняння потрібно застосовувати регуляризуючий метод; як такий розглянемо метод Ландвебера [1, 5, 6]

$$\eta_k = \eta_{k-1} - \gamma_L K^*(K\eta_{k-1} + Gf_2 - f_1), \tag{3}$$

де $\gamma_L > 0$ — параметр релаксації; η_0 — довільне початкове наближення. Як критерій зупинки ітераційного процесу може використовуватися принцип нев'язки. Питання чисельного розв'язування прямих задач, які виникають на кожній ітерації даного методу, розглянуто нижче. При цьому для розв'язування спряженої задачі (2) використовується заміна $v(x,t) = u(x, T-t)$. Відповідно до загальної теорії [6] справедливим є такий результат про збіжність.

Теорема 1. *Нехай f_1, $f_2 \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ і u — розв'язок задачі Коші* (1). *Якщо $0 < < \gamma_L < 1/\|K\|^2$, то для u_k з ітераційного процесу* (3) *має місце збіжність*

$$\lim_{k\to\infty} \|u - u_k\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} = 0$$

для будь-якого початкового наближення $\eta_0 \in L^2(\Gamma_1 \times (0,T))$.

Нескладно пересвідчитися, що на кожній ітерації методу Ландвебера необхідно розв'язувати дві прямі мішані початково-крайові задачі Діріхле–Неймана для рівняння теплопровідності.

Чисельне розв'язування прямих задач. Розглянемо мішану початково-крайову задачу Діріхле–Неймана

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{в} \quad D \times (0,T), \\ u = g_1 & \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g_0 & \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ u(x,0) = 0 & \text{для} \quad x \in D. \end{cases}$$

Для чисельного розв'язування скористаємося поєднанням методу Роте і граничних інтегральних рівнянь [2, 3]. Вводимо на $[0,T]$ рівновіддалений поділ $t_n = (n+1)h$, $h = T/(N+1)$, тоді $u_n(x) \approx u(x,t_n)$, $g_{\ell n}(x) = g_\ell(x,t_n)$ і $u_{-1} = g_{\ell,-1} = 0$, де $n = 0,\ldots,N-1$, $\ell = 0{,}1$.

Після використання скінченно-різницевої апроксимації похідної за часом одержуємо послідовність N стаціонарних мішаних задач

$$\Delta u_n - \gamma^2 u_n = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} u_m \quad \text{в} \quad D, \tag{4}$$

$$u_n = g_{1n} \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial \nu} = g_{0n} \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{5}$$

де $\gamma > 0$ і β_i — відомі коефіцієнти. На нескінченності вимагатимемо забезпечення умови регулярності $u_n(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ рівномірно у всіх напрямках.

Означення 1. Послідовність функцій Φ_n, $n = 0, \ldots, N-1$ називається фундаментальним розв'язком системи рівнянь (4), якщо

$$\Delta_x \Phi_n(x, y) - \sum_{m=0}^{n} \beta_{n-m} \Phi_m(x, y) = \delta(x - y).$$

Теорема 2. *Функції*

$$\Phi_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \{K_0(\gamma|x - y|) v_n(|x - y|) + K_1(\gamma|x - y|) w_n(|x - y|)\}$$

при $n = 0, \ldots, N-1$ *є фундаментальним розв'язком* (4) *в сенсі означення 1. Тут* K_0 *і* K_1 — *модифіковані функції Бесселя другого роду, а* v_n, w_n — *відомі поліноми, коефіцієнти* a_{nm} *яких рекурсивно визначаються через* γ *і* β_n *(див. [2]).*

Зауважимо, що в [7] знайдено дещо інші подання для Φ_n, обчислення яких здійснюється за рекурентними формулами. Для зведення мішаних стаціонарних задач до граничних інтегральних рівнянь введемо поняття послідовності функцій Гріна.

Означення 2. Функції N_n при $n = 0, \ldots, N-1$ називають послідовністю функцій Гріна для задачі Неймана для системи еліптичних рівнянь (4) в області D_0, якщо $\forall\, x, y \in D_0$, $N_n(x, y)$ є фундаментальним розв'язком в сенсі означення 1; $\forall\, x \in D_0$ та $\forall\, y \in \Gamma_0$ справджується $\dfrac{\partial N_n}{\partial \nu(y)}(x, y) = 0$.

Для рівнянь (4) має місце аналог формул Гріна.

Теорема 3. *Розв'язок* u_n *задачі Неймана для послідовності еліптичних рівнянь в* D_0 *виражається як*

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \int_{\Gamma_0} \left[\frac{\partial u_m}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial \nu}(y) \right] N_{n-m}(x, y)\, ds(y).$$

Доведення. Ідея доведення полягає у застосуванні до $u_n(y)$ та $N_n(\cdot, y)$ аналогу другої формули Гріна та використанні властивостей функцій N_n.

Теорема 4. *Функції Гріна для задачі Неймана для послідовності еліптичних рівнянь мають вигляд*

$$N_n(x, y) = \Phi_n(x, y) + \phi_n(x, y),$$

де Φ_n — *фундаментальний розв'язок, а* ϕ_n *визначається з граничних задач*

$$\Delta_y \phi_n(x, y) - \sum_{m=0}^{n} \beta_{n-m} \phi_m(x, y) = 0 \quad \textit{в} \quad D_0,$$

$$\frac{\partial \phi_n(x,y)}{\partial \nu(y)} = -\frac{\partial \Phi_n(x,y)}{\partial \nu(y)} \quad \text{на} \quad \Gamma_0.$$

Подамо розв'язок u_n мішаної задачі (4), (5) у вигляді

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \int_{\Gamma_1} \varphi_m(y) N_{n-m}(x,y)\, ds(y) + \omega_n(x),$$

де φ_n — невідомі густини і

$$\omega_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \int_{\Gamma_0} [g_{0m}(y) - g_{0,m-1}(y)] N_{n-m}(x,y)\, ds(y).$$

Після застосування теореми 3 та теореми про неперервність потенціалу простого шару в R^2 одержимо послідовність інтегральних рівнянь

$$\int_{\Gamma_1} \varphi_n(y) N_0(x,y)\, ds(y) = g_{1n}(x) - \omega_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma_1} \varphi_m(y) N_{n-m}(x,y)\, ds(y), \qquad x \in \Gamma_1. \quad (6)$$

Інтегральні рівняння (6) є коректними у відповідних просторах Гьольдера або Соболєва [2, 3]. Нехай Γ_1 має параметричне подання $\Gamma_1 = \{x(s) = (x_1(s), x_2(s)),\ s \in [0, 2\pi]\}$. Параметризація інтегральних рівнянь та виділення логарифмічної особливості в ядрах інтегральних операторів (6) приводить до послідовності рівнянь

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_n(\sigma) \left[H_{00}(s,\sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} + H_{01}(s,\sigma) \right] d\sigma = G_n(s), \quad (7)$$

де $\mu_n(\sigma) = \varphi_n(x(\sigma))|x'(\sigma)|$. Праві частини мають вигляд

$$G_n(s) = g_{1n}(s) - \omega_n(s) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \mu_m(\sigma) \left[H_{n-m,0}(s,\sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} + H_{n-m,1}(s,\sigma) \right] d\sigma.$$

Тут $g_{1n}(s) = g_{1n}(x(s))$, $\omega_n(s) = \omega_n(x(s))$ і ядра інтегральних операторів

$$H_{n0}(s,\sigma) = -\frac{1}{2} I_0(\gamma |r(s,\sigma)|) v_n(|r(s,\sigma)|) + \frac{1}{2} I_1(\gamma |r(s,\sigma)|) w_n(|r(s,\sigma)|),$$

$$H_{n1}(s,\sigma) = H_n(s,\sigma) - H_{n0}(s,\sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2},$$

де $H_n(s,\sigma) = N_n(x(s), x(\sigma))$, $r(s,\sigma) = x(s) - x(\sigma)$. Функцію $H_{n1}(s,\sigma)$ можна неперервно довизначити при $s = \sigma$ як

$$H_{n1}(s,s) = -\frac{1}{2} \ln \frac{e\gamma^2 |x'(s)|^2}{4} - C_E + \frac{a_{n1}}{\gamma} + \phi_n(x(s), x(s)),$$

де C_E — константа Ейлера; a_{n1} — коефіцієнт полінома w_n.

Для подальшої дискретизації методу введемо рівновіддалений поділ $s_j = \sigma_j = j\pi/M$, $M \in \mathbb{N}$. При обчисленні інтегралів у послідовності інтегральних рівнянь (7) скористаємося тригонометричними квадратурами

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} f(\sigma_j),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}d\sigma \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} R_j(s)f(\sigma_j), \tag{8}$$

де R_j — відомі вагові функції [8]. Інтеграли в ω_n обчислюються за допомогою квадратур на основі sink-апроксимації, а також конформних відображень.

Остаточно, застосувавши метод поточкової колокації, одержимо послідовність систем лінійних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \widetilde{\mu}_{nj}\left\{R_{|j-k|}H_{00}(s_k, s_j) + \frac{1}{2M}H_{01}(s_k, s_j)\right\} = G^1_{nk},$$

де $\widetilde{\mu}_{nj} \approx \mu_n(s_j)$, $R_j = R_j(0)$, G^1_{nk} — відомі праві частини.

Питання збіжності та оцінки похибки такої чисельної схеми розв'язування інтегральних рівнянь розглянуто в [4].

Ітераційний метод вимагає обчислення розв'язку та його нормальної похідної на границі. Враховуючи поведінку потенціалу простого шару при переході через границю, розв'язок u_n можна неперервно продовжити на Γ_0. Натомість на Γ_1, використовуючи теорему про стрибок нормальної похідної потенціалу простого шару при переході через границю, одержимо

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x) = -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\varphi_m(x) + \sum_{m=0}^{n}\int_{\Gamma_1}\varphi_m(y)\frac{\partial \Phi_{n-m}(x,y)}{\partial \nu(x)}\,ds(y) + \frac{\partial \omega_n(x)}{\partial \nu(x)}, \qquad x \in \Gamma_1.$$

Після параметризації та виділення логарифмічної особливості в ядрі дане співвідношення матиме вигляд

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x(s)) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_0^{2\pi}\mu_m(\sigma)[\widetilde{H}^{11}_{n-m,0}(s,\sigma)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2} + \widetilde{H}^{11}_{n-m,1}(s,\sigma)]d\sigma -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{\mu_m(s)}{|x'(s)|} + \frac{\partial \omega_n(x(s))}{\partial \nu(x(s))}, \qquad s \in [0, 2\pi].$$

Тут функції $\widetilde{H}^{11}_{n0}$ і $\widetilde{H}^{11}_{n1}$ є неперервними, тому при чисельній реалізації можна використати тригонометричні квадратури (8).

Чисельні експерименти. Розглянемо задачу Коші в смузі D_0 з границею $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \bigcup \Gamma_0^2$, де $\Gamma_0^1 = \{(t, 0), t \in \mathbb{R}\}$, $\Gamma_0^2 = \{(t, \pi), t \in \mathbb{R}\}$, і включенням D_1, обмеженим кривою $\Gamma_1 = \{x(s) = \sqrt{\cos s + 0{,}25\sin s}(\cos s, \sin s), s \in [0, 2\pi]\}$, вибравши параметри $T = c = 1$. Як

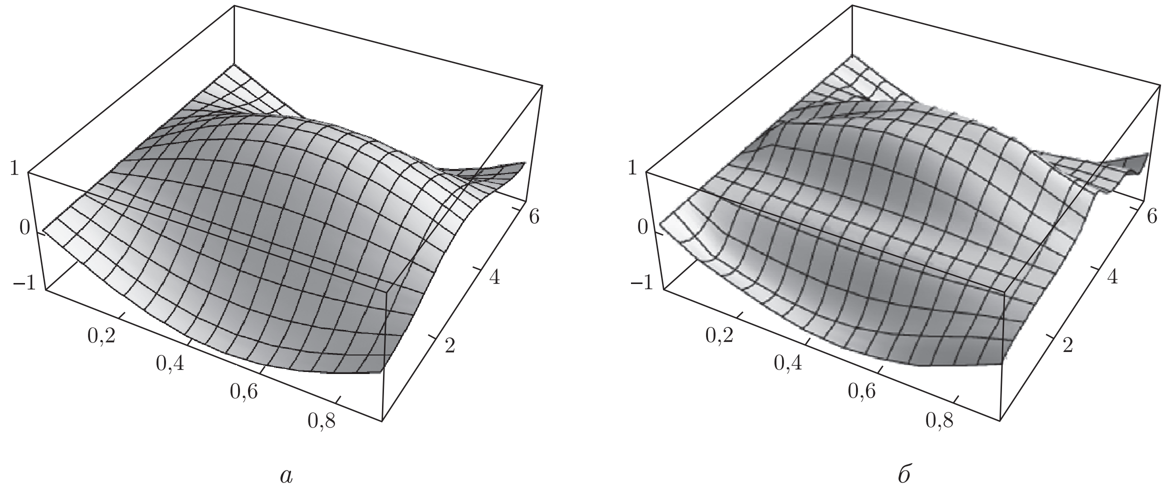

Рис. 2. Чисельні результати для випадку смуги: *а* — точний розв'язок; *б* — наближений розв'язок

точний розв'язок покладемо $u(x(s),t)|_{\Gamma_1\times(0,T)} = -\sin(t)\cos(s)$. Далі, маючи $u|_{\Gamma_1\times(0,T)}$ та вибравши $f_2 = 0$, згенеруємо f_1 як розв'язок відповідної прямої задачі Діріхле–Неймана, при цьому в значення f_1 випадковим чином вноситься 5% збурення. Результати роботи ітераційного процесу зображені на рис. 2, параметри дискретизації при розв'язуванні прямої задачі вибрані таким чином: $N = 9$, $M = 32$, $M_\infty = 100$, а параметр $\gamma_L = 2{,}5$.

Як бачимо, незважаючи на внесений шум у вхідні дані, вдалося одержати придатну реконструкцію граничних значень. При цьому завдяки ефективній реалізації розв'язування прямих задач є можливість здійснити велику кількість ітерацій методу Ландвебера для досягнення кращої точності.

1. *Bastay G., Kozlov V. A., Turesson B. O.* Iterative methods for an inverse heat conduction problem // J. Inverse Ill-posed Probl. – 2001. – **9**. – P. 375–388.
2. *Chapko R., Kress R.* Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations // J. Integral Equations Appl. – 1997. – **9**. – P. 47–69.
3. *Chapko R., Vavrychuk V. G.* On the numerical solution of a mixed initial boundary value problem for the heat equation in a double-connected planar domain // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – **97**. – P. 26–38.
4. *Chapko R., Kress R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind // Agarwal, ed., World Scientific Series in Applicable Analysis. Contributions in Numerical Mathematics, Vol. 2. – Singapore: World Scientific, 1993. – P. 127–140.
5. *Johansson B. T.* An iterative method for a Cauchy problem for the heat equation // IMA J. Appl. Math. – 2006. – **71**. – P. 262–286.
6. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 332 p.
7. *Gavrilyuk I., Makarov V.* An explicit boundary integral representation of the solution of the two-dimensional heat equation and its discretization // J. Integral Equations Appl. – 2000. – **12**. – P. 63–83.
8. *Kress R.* Linear integral equations. – Heidelberg: Springer, 1999. – 388 p.

Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 17.01.2011

V. G. Vavrychuk, R. S. Chapko

On the numerical solution of a Cauchy problem for the heat equation in semiinfinite domains based on integral equations

We consider a Cauchy problem for the heat equation in a semiinfinite domain, where the temperature field is to be reconstructed from the temperature and a heat flux given on a part of the boundary. A Landweber-type method is extended for this case. As a result, a sequence of mixed well-posed problems is solved at each iteration step to obtain a stable approximation to the original Cauchy problem. We developed an efficient boundary integral equation method for the numerical solution of these mixed problems, based on the Rothe's method and Green's function technique. Numerical experiments are presented with noisy data, showing the efficiency and the stability of the proposed numerical procedure.