УДК 517.36

А. С. Хорошун

Об одном условии практической устойчивости движения

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Розглянуто поняття практичної стійкості систем диференціальних рівнянь збуреного руху. Запропоновано умову, яка гарантує практичну стійкість досліджуваної системи відносно певним чином заданих областей.

Понятие практической устойчивости движения является естественным дополнением классического понятия устойчивости, введенного А. М. Ляпуновым [1]. В отличие от классического понятия устойчивости, которое требует лишь наличия δ (величина отклонений начальных условий) для заданного ε (величина последующих отклонений решений), наличие свойства практической устойчивости дает возможность оценить величины δ и ε для исследуемой системы, что, несомненно, имеет большое значение для приложений (см. [2, 3] и библиографию там). В данной работе предложено условие, которое обеспечивает практическую устойчивость рассматриваемой системы относительно определенным образом заданных областей.

Постановка задачи и вспомогательные результаты. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, которая удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения начальной задачи. В общем случае требуется, чтобы $f(0,t) = 0$, т. е. чтобы $x = 0$ было состоянием равновесия системы (1).

Определения практической устойчивости движения относительно некоторых областей приведены в [2].

Заметим, что большинство критериев практической устойчивости не гарантируют устойчивости по Ляпунову состояния $x = 0$. Однако часто именно бесконечность интервала практической устойчивости важна для исследования конкретной системы. Далее приводится критерий, который гарантирует это важное свойство.

Ограничимся рассмотрением областей $S_0(t_0)$ и $S(t)$ в виде $S_0(t_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n\colon \|x_0\| < \lambda\}$, $S(t) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| < A\}$, $0 < \lambda \leqslant A < +\infty$, которое используются во многих практически важных случаев. Отметим, что в работе применяется евклидова норма для векторов и спектральная норма для соответствующих матриц.

Для исследования системы (1) воспользуемся вспомогательной функцией $V(x) = x^T x$ и докажем лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 1. *Пусть система уравнений* (1) *такова, что для вектор-функции* $f(x,t)$ *существует интегрируемая на интервале* $[t_0, +\infty)$ *функция* $g(t)$ *такая, что* $\|f(x,t)\| \leqslant g(t)$, *для всех* $t \in \mathbb{R}_+$, $t \geqslant t_0$, $x \in S(t)$ *и выполняется условие*

$$2A \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\,ds \leqslant \inf_{x \in \partial S(t)} V(x(t)) - \sup_{x_0 \in \partial \overline{S_0(t_0)}} V(x(t_0)) \tag{2}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $t \geqslant t_0$. *Тогда движение, которое задается системой* (1), *практически устойчиво относительно областей* $(S_0(t_0), S(t), t_0)$.

Доказательство. Пусть $x(t; t_0, x_0)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $x_0 \in \in S_0(t_0)$. Предположим, что существует момент $t_1 \in (t_0, +\infty)$ такой, что $x(t_1; t_0, x_0) \in \partial S(t_1)$ и $x(t; t_0, x_0) \in \operatorname{int} S(t)$ при $t \in (t_0, t_1)$. Для функции $V(x)$ имеем

$$V(x(t_1; t_0, x_0)) = V(x(t_0; t_0, x_0)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot V(x(s; t_0, x_0))\big|_{(1)} ds =$$

$$= V(x(t_0; t_0, x_0)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} (f^T(x(s), s)x + x^T f(x(s), s))\, ds \leqslant$$

$$\leqslant V(x(t_0; t_0, x_0)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} 2\|x\| \|f(x(s), s)\|\, ds < \sup_{x_0 \in \overline{\partial S_0(t_0)}} V(x(t_0; t_0, x_0)) + 2A \int\limits_{t_0}^{t_1} g(s)\, ds,$$

откуда, учитывая (2), получим неравенство

$$V(x(t_1; t_0, x_0)) < \inf_{x \in \partial S(t_1)} V(x(t_1)),$$

из которого следует, что $x(t_1; t_0, x_0) \overline{\in} \partial S(t_1)$, что противоречит сделанному предположению о достижимости траекторией $x(t; t_0, x_0)$ системы (1) границы области $S(t)$ в момент t_1. Следовательно, не существует $t_1 \in (t_0, +\infty)$, при котором движение, описываемое системой (1), покинет область $S(t)$, если оно начинается в области $S_0(t_0)$.

Лемма 1 доказана.

Основной результат. Далее сформулируем и докажем теорему, которая устанавливает достаточные условия практической устойчивости движения, определяемого системой (1), относительно областей $(S_0(t_0), S(t), t_0)$.

Теорема 1. *Пусть для функции* $g(t)$ *из леммы 1 выполняется условие*

$$\lim_{t \to +\infty} \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds = M.$$

Тогда для практической устойчивости движения, которое определяется системой (1), *относительно областей* $(S_0(t_0), S(t), t_0)$ *достаточно выполнения неравенства*

$$M \leqslant \frac{A^2 - \lambda^2}{2A}. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно лемме 1, для практической устойчивости движений, которые задаются системой (1), относительно $(S_0(t_0), S(t), t_0)$ достаточно выполнения неравенства (2) при любом $t \in \mathbb{R}_+$, $t \geqslant t_0$. Оценим величину интеграла в левой его части

$$2A \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds \leqslant 2A \int\limits_{t_0}^{+\infty} g(s)\, ds = 2A \lim_{t \to +\infty} \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds = 2AM.$$

Правая часть неравенства (2) при заданных областях и функции $V(x)$ имеет вид

$$\inf_{x\in\partial S(t)} V(x(t)) - \sup_{x_0\in\partial \overline{S_0(t_0)}} V(x(t_0)) = A^2 - \lambda^2.$$

Таким образом, если выполняется соотношение (3), то неравенство (2) для системы (1) имеет место и движение, которое задается системой (1), практически устойчиво относительно областей $(S_0(t_0), S(t), t_0)$.

Теорема 1 доказана.

Заметим, что результат теоремы 1 можно применить и в случае конечного интервала времени. Тогда лемма 1 и теорема 1 примут следующий вид.

Лемма 2. *Пусть система уравнений* (1) *такова, что для вектор-функции* $f(x,t)$, *входящей в ее состав, существует интегрируемая на интервале* $[t_0, +\infty)$ *функция* $g(t)$ *такая, что* $\|f(x,t)\| \leqslant g(t)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}_+$, $t \in [t_0, T]$, $x \in S(t)$ *и выполняется условие*

$$2A\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \leqslant \inf_{x\in\partial S(t)} V(x(t)) - \sup_{x_0\in\partial \overline{S_0(t_0)}} V(x(t_0))$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $t \in [t_0, T]$. *Тогда движение, которое задается системой* (1), *устойчиво на интервале* $[t_0, T]$ *относительно областей* $(S_0(t_0), S(t), t_0)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Теорема 2. *Пусть для функции* $g(t)$ *из леммы 2 выполняется условие*

$$\int_{t_0}^{T} g(s)\,ds = M_1.$$

Тогда для устойчивости движения, которое определяется системой (1), *на интервале* $[t_0, T]$ *относительно* $(S_0(t_0), S(t), t_0)$ *достаточно выполнения неравенства*

$$M_1 \leqslant \frac{A^2 - \lambda^2}{2A}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

П р и м е р. Как пример применения полученных результатов исследуем поведение решений системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\cos t}{10(1+t^2)}x_2 + \dfrac{\sin t}{10(1+t^2)}x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\cos t}{10(1+t^2)}x_1 + \dfrac{\sin t}{10(1+t^2)}x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{4}$$

на бесконечном интервале времени, где x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^1$, $t \in \mathbb{R}_+$. Зададим области $S_0(t_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon \|x_0\| < 1/2\}$ и $S(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < 1\}$. В качестве функции Ляпунова выберем функцию $V(x) = x^T x$. Систему (4) представим в виде (1), где $f(x,t) = A(x,t)x$, $x = (x_1, x_2)^T$,

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin t}{10(1+t^2)}\|x\|^2 & \dfrac{\cos t}{10(1+t^2)} \\ -\dfrac{\cos t}{10(1+t^2)} & \dfrac{\sin t}{10(1+t^2)}\|x\|^2 \end{pmatrix}.$$

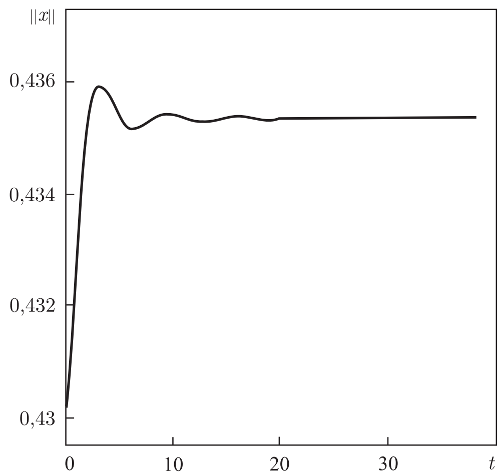

Рис. 1

Определим функцию $g(t)$. $\|f(x,t)\| \leqslant \|A(x,t)\|\|x\| < 1/(10(1+t^2)) = g(t)$. Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{t} g(s)\,ds = \pi/20 < (A^2-\lambda^2)/(2A) = 3/8$, то неравенство (3) выполняется и движение, которое задается системой (4), практически устойчиво относительно областей $S_0(t_0)$, $S(t)$.

На рис. 1 представлено поведение нормы решения системы (4) с начальными условиями $x_{1_0} = 0{,}35$, $x_{2_0} = 0{,}25$ в начальный момент времени $t_0 = 0$, $\|x_0\| < 1/2$. Как видно из рисунка, при всех $t > t_0$ имеет место соотношение $\|x\| < 1$, т. е. движение, которое задается системой (4), практически устойчиво относительно областей $S_0(t_0)$, $S(t)$.

Таким образом, в работе рассматривается свойство практической устойчивости системы дифференциальных уравнений возмущенного движения. На основании подхода, предложенного [4] и развитого в [2], который состоит в исследовании поведения некоторой функции типа Ляпунова на траекториях системы, получено условие, которое гарантирует практическую устойчивость исследуемой системы относительно определенным образом заданных областей. В работе рассматривается иллюстративный пример, который поясняет применение полученного условия практической устойчивости.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. – Москва: Изд-во АН СССР, 1956. – 216 с.
2. *Мартынюк А. А.* Практическая устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1983. – 247 с.
3. *Мартынюк А. А.* Техническая устойчивость в динамике. – Киев: Техніка, 1973. – 188 с.
4. *Weiss L., Infante E. F.* On the stability of systems defined over a finite time interval // Proc. Nath. Acad. Sci. USA. – 1965. – **54**. – P. 44–48.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 11.02.2011

A. S. Khoroshun

About one condition of the practical stability of movement

The notion of practical stability of the systems of differential equations describing a perturbed motion is investigated. One condition of such a stability relative to the regions which are defined in some way is proposed.