УДК 517.5

Т. В. Ломако

Теоремы сходимости и компактности для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Доведено теореми збіжності та компактності класів регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями теоретико-множинного типу на дилатацію.

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $\mu(z)\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом* и

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \quad — \tag{2}$$

дилатационным отношением, или просто *дилатацией* уравнения (1).

Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$. Гомеоморфизм f класса $W^{1,1}_{\text{loc}}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ п. в. Наконец, *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D будем называть регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1) п. в. в D. Понятие регулярного решения впервые введено в работе [1].

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса ACL, заданный в некоторой области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, будем называть $Q(z)$-квазиконформным ($Q(z)$-к. к.) отображением, если его дилатация

$$K_{\mu_f}(z) \leqslant Q(z) \quad \text{п. в.}, \tag{3}$$

где $Q(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ — произвольная функция. Здесь $\mu_f = f_{\overline{z}}/f_z$, если $f_z \neq 0$, и $\mu_f = 0$, если $f_z = 0$. Отметим, что понятие $Q(z)$-к. к. отображения впервые было введено М. Шиффером и Г. Шобером в [2] для случая, когда $Q(z) \in L^\infty$, т. е. фактически для Q-к. к. отображений, где $Q = \|Q(z)\|_\infty$.

В работах К. Андриян-Казаку, Л. И. Волковыского, М. С. Иоффе, С. Л. Крушкаля, Р. Кюнау, М. Летинена, Г. Ренельта, В. И. Рязанова, О. Тейхмюллера, М. Шиффера, Г. Шобера и др. исследовались классы $Q(z)$-к. к. отображений, для которых

$$\mu(z) \in \Delta_{q(z)} \quad \text{п. в.}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_{q(z)} = \{\nu \in \mathbb{C}\colon |\nu| \leqslant q(z)\}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

$$q(z) = \frac{Q(z) - 1}{Q(z) + 1}, \tag{6}$$

а также классы с дополнительными ограничениями вида

$$\mathcal{F}(\mu(z), z) \leqslant 0 \quad \text{п. в.}, \tag{7}$$

где $\mathcal{F}(\mu, z)\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Наконец, последняя из постановок М. Шиффера – Г. Шобера привела к рассмотрению классов с ограничениями общего теоретико-множественного вида:

$$\mu(z) \in M(z) \subseteq \Delta_{q(z)} \quad \text{п. в.} \tag{8}$$

Однако все это развитие происходило, фактически, в рамках Q-к. к. отображений, поскольку предполагалось, что

$$\operatorname{ess\,sup} Q(z) = Q < \infty. \tag{9}$$

Теорема существования и единственности Давида [3] позволила продвинуться много дальше в указанном направлении. Именно, обозначим $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых функций, удовлетворяющих условию (8), но где, вообще говоря, не выполнено (9). Через H_M (H_M^*) обозначим совокупность всех (регулярных) гомеоморфизмов плоскости $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ класса ACL, сохраняющих ориентацию с комплексными характеристиками из $\mathfrak{M}_M$ и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Будем говорить, что измеримая функция $Q(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ *экспоненциально ограничена по мере*, если существуют постоянные $T \geqslant 1$, $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что для всех $t \geqslant T$

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C}\colon Q(z) > t\} \leqslant ce^{-\gamma t}. \tag{10}$$

В работе [4] была доказана компактность класса H_M с $Q(z)$, экспоненциально ограниченной по мере. В настоящей работе ставиться задача доказать компактность класса регулярных гомеоморфизмов H_M^* с более общими условиями на $Q(z)$.

Всюду далее $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < r\}$, $\operatorname{dist}(E, F)$ — евклидово расстояние между множествами E и F в $\mathbb{C}$. Обозначим через h *сферическое (хордальное) расстояние* между точками z_1 и z_2 в $\overline{\mathbb{C}}$: $h(z_1, \infty) = 1/\sqrt{1 + |z_1|^2}$, $h(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|/\left(\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}\right)$, $z_1, z_2 \neq \infty$. Через $dS(z) = (1 + |z|^2)^{-2} dxdy$ обозначим *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}}$, соответственно, через L_s^1 — класс всех функций $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в $\mathbb{C}$ относительно сферической площади.

Теоремы сходимости. Рассмотрим теоремы сходимости для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа на дилатацию. Для формулировки основных результатов нам понадобятся некоторые элементы теории инвариантно-выпуклых множеств (см., например, [5]).

Пусть $\mathcal{G}$ — группа всех дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя. Множество M из $\mathbb{D}$ называется *инвариантно-выпуклым*, если все множества $g(M)$, $g \in \mathcal{G}$, являются выпуклыми. В частности, такие множества являются выпуклыми.

Инвариантно-выпуклой оболочкой $\operatorname{inv}\operatorname{co} M$ множества M из $\mathbb{D}$, $\overline{M} \subseteq \mathbb{D}$, будем называть минимальное по включению замкнутое инвариантно-выпуклое множество, содержащее M.

Следующая лемма является обобщением теоремы 3.1 (см. также замечание 3.1) в [6].

Лемма 1. *Пусть* $f_n \colon D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *— последовательность* $Q(z)$*-к. к. отображений с локально суммируемой* $Q(z)$ *и* $f_n \to f$ *локально равномерно, где* $f \colon D \to \mathbb{C}$ *— гомеоморфизм.*

Тогда f *является* $Q(z)$*-к. к. отображением и* $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ *при* $n \to \infty$ *слабо в* L^1_{loc}. *Кроме того, для почти всех* $z \in E'$

$$\mu(z) \in \operatorname{inv}\operatorname{co} M(z), \tag{11}$$

где E' *— множество всех регулярных точек отображения* f *и*

$$M(z) = \mathrm{Ls}_{n\to\infty}\{\mu_n(z)\}. \tag{12}$$

Замечание 1. Здесь, как обычно, через $\mathrm{Ls}\{\mu_n(z)\}$ обозначен верхний топологический предел одноточечных множеств $\{\mu_n(z)\}$, т. е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$ (см. [7, с. 344]).

Теорема 1. *Пусть* $f_n \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *— последовательность регулярных гомеоморфизмов,* $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(\infty) = \infty$, *сходящаяся локально равномерно в* $\overline{\mathbb{C}}$ *относительно сферической метрики к некоторому отображению* f, *причем* $K_{\mu_{f_n}}(z) \leqslant Q(z) \in L^1_S$. *Тогда* f *— регулярный гомеоморфизм* $\overline{\mathbb{C}}$ *с нормировками* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Комбинируя лемму 1 и теорему 1 получаем:

Следствие 1. *В условиях теоремы 1*

$$\mu(z) \in \operatorname{inv}\operatorname{co} M(z) \quad \textit{п. в.}, \tag{13}$$

где $M(z)$ *определено в* (12).

Теоремы компактности. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений из области $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *нормальным*, если каждая последовательность отображений f_m из $\mathfrak{F}$ имеет подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится к непрерывному отображению $f \colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ равномерно на каждом компактном множестве $K \subset D$ относительно сферической метрики. Семейство $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым*, если все предельные отображения f принадлежат $\mathfrak{F}$. Наконец, класс отображений $\mathfrak{F}$ называется *компактным*, если $\mathfrak{F}$ нормален и замкнут.

Будем говорить, что семейство замкнутых множеств в $M(z) \subseteq \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{C}$, *измеримо по параметру* z, если для любого замкнутого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ множество точек

$$E_0 = \{z \in \mathbb{C} \colon M(z) \subseteq M_0\} \tag{14}$$

измеримо по Лебегу (ср. [8, с. 27]). В дальнейшем мы используем следующее обозначение:

$$Q_M(z) := \frac{1 + q_M(z)}{1 - q_M(z)}, \tag{15}$$

где

$$q_M(z) = \max_{\nu \in M(z)} |\nu|. \tag{16}$$

Лемма 2. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, такое, что $Q_M(z) \in L_S^1$. Предположим, что для некоторых фиксированных $\varepsilon_0 > 0$ и $p < 2$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q_M(z) \cdot \psi^2(|z-z_0|)\,dxdy \leqslant c \cdot I^p(\varepsilon) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{17}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$,

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{18}$$

Тогда класс H_M^* компактен.

Следуя работе [9], говорим, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $z_0 \in D$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} |\varphi(z) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon(z_0)|\,dxdy < \infty, \tag{19}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z_0) = -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} \varphi(z)\,dxdy < \infty \quad - \tag{20}$$

среднее значение функции $\varphi(z)$ по кругу $B(z_0, \varepsilon)$. Также говорят, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в* D, сокр. $\varphi \in \mathrm{FMO}(D)$, или просто $\varphi \in \mathrm{FMO}$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $z_0 \in D$.

Концепция конечного среднего колебания может быть распространена в бесконечность стандартным образом. Именно, пусть даны область $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in D$, и функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что φ имеет *конечное среднее колебание в* ∞, если функция $\varphi^*(z) = \varphi(1/\overline{z})$ имеет конечное среднее колебание в 0. Применяя инверсию $z \to 1/\overline{z}$ получаем следующее эквивалентное условие

$$\int\limits_{|z|\geqslant R} |\varphi(z) - \widetilde{\varphi}_R| \frac{dxdy}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \qquad \text{при} \qquad R \to \infty,$$

где

$$\widetilde{\varphi}_R = \frac{R^2}{\pi} \int\limits_{|z|\geqslant R} \varphi(z) \frac{dxdy}{|z|^4}.$$

Теорема 2. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если $Q_M \in \mathrm{FMO}(\overline{\mathbb{C}})$, то класс H_M^* компактен.*

Следствие 2. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} Q_M(z)\,dxdy < \infty \qquad \forall\, z_0 \in \mathbb{C}$$

и

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{R^2}{\pi}\int\limits_{|z|\geqslant R} Q_M(z)\frac{dxdy}{|z|^4}<\infty \qquad z_0=\infty,$$

то класс H_M^* *компактен.*

Точка $z_0\in\mathbb{C}$ называется *точкой Лебега* функции $Q\colon\overline{\mathbb{C}}\to\mathbb{R}$, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \fint\limits_{B(z_0,\varepsilon)} |Q(z)-Q(z_0)|\,dxdy=0. \tag{21}$$

Аналогично, $z_0=\infty$ будем называть точкой Лебега функции Q, если

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\ R^2\int\limits_{|z|\geqslant R} |Q(z)-Q(\infty)|\frac{dxdy}{|z|^4}=0. \tag{22}$$

Следствие 3. *Пусть* $M(z)$, $z\in\mathbb{C}$, *— семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в* $\mathbb{D}$, *измеримое по параметру. Если каждая точка* $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ *является точкой Лебега для функции* Q_M, *то класс* H_M^* *компактен.*

Теорема 3. *Пусть* $M(z)$, $z\in\mathbb{C}$, *— семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в* $\mathbb{D}$, *измеримое по параметру. Предположим, что*

$$\int\limits_0^1 \frac{dr}{rk_{z_0}(r)}=\infty \qquad \forall\, z_0\in\overline{\mathbb{C}}, \tag{23}$$

где $k_{z_0}(r)$ *— среднее значение функции* $Q_M(z)$ *на сфере* $|z-z_0|=r$ *при* $z_0\in\mathbb{C}$ *и на сфере* $|z|=1/r$ *при* $z_0=\infty$. *Тогда класс* H_M^* *компактен.*

Следствие 4. *Пусть* $M(z)$, $z\in\mathbb{C}$, *— семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в* $\mathbb{D}$, *измеримое по параметру. Предположим, что*

$$k_{z_0}(r)=O\left(\log\frac{1}{r}\right) \qquad \text{\textit{при}} \qquad r\to 0 \tag{24}$$

в каждой точке $z_0\in\mathbb{C}$ *и*

$$k_{z_0}(R)=O(\log R) \qquad \text{\textit{при}} \qquad R\to\infty \tag{25}$$

в точке $z_0=\infty$. *Тогда класс* H_M^* *компактен.*

Для каждой неубывающей функции $\Phi\colon\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ обратную функцию $\Phi^{-1}\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ можно корректно определить следующим образом:

$$\Phi^{-1}(\tau)=\inf_{\Phi(t)\geqslant\tau} t.$$

Здесь inf равен ∞, если множество $t\in[0,\infty]$, где $\Phi(t)\geqslant\tau$, является пустым.

Теорема 4. *Пусть* $M(z)$, $z\in\mathbb{C}$, *— семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в* $\mathbb{D}$, *измеримое по параметру, и пусть*

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(Q_M(z))\,dS(z)<\infty, \tag{26}$$

где $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ — *неубывающая выпуклая функция такая, что*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]} = \infty \tag{27}$$

для некоторого $\delta_0 > \Phi(0)$. *Тогда класс* H_M^* *компактен.*

Отметим, что условие (27) является не только достаточным, но и необходимым для компактности классов H_M^* с ограничениями интегрального типа (26).

1. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **54**, No 10. – P. 935–950.
2. *Schiffer M., Schober G.* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy–Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1. – 1976. – **2**. – P. 501–531.
3. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $|\mu|_\infty = 1$ // Ibid. – 1988. – **13**. – P. 25–70.
4. *Рязанов В. И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Донецк, 1993. – 281 с.
5. *Рязанов В. И.* Об усилении теоремы сходимости К. Штребеля // Изв. РАН. Сер. мат. – 1992. – **56**, No 3. – С. 636–653.
6. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**, No 4. – P. 524–535.
7. *Куратовский К.* Топология. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
8. *Сакс С.* Теория интеграла. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 494 с.
9. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, No 3. – С. 395–417.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 28.02.2011

T. V. Lomako

The convergence and compactness theorems for Beltrami equations with restrictions of the set-theoretic type

The convergence and compactness theorems for classes of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with constraints of the set-theoretic type on a dilatation are proved.