УДК 539.3:537.228.1:538.6

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про резонансні коливання пластинчатих п'єзоелектричних вібраторів

Вперше на прикладі коливань пластинчатого п'єзоелектричного вібратора проаналізовані резонансні і антирезонансні частоти при підведенні до електродів електричної напруги (резонанс напруг) або електричного струму (резонанс струму). Виявлена інверсійність резонансних і антирезонансних частот.

В роботі розглянуто резонансні коливання пластинчатого п'єзоелектричного вібратора при заданих на електродах електричній напрузі (резонанс напруг) або при заданому на електродах електричному струмі (резонанс струму). Одержано і проаналізовано рівняння резонансних частот і рівняння частот антирезонансу струму (в першому випадку) і частот антирезонансу напруги (у другому випадку).

Розглянемо поляризовану по товщині тонку п'єзокерамічну пластину з електродованими площинами $z = \pm h/2$. Механічні напруження σ_r, σ_θ при осесиметричній деформації визначаються [1–3] через переміщення u_r і напруженість електричного поля E_z

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E\frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right),\\
\sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(\nu_E\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

в яких використані формули для деформацій в циліндричних координатах і $v_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$.

Рівняння коливань відносно механічного переміщення $u_r(r,t)$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Для кільцевої пластини $r_0 < r < r_1$ при гармонічних коливаннях $f(r,t) = \operatorname{Re} f^a(r)\exp i\omega t$ розв'язок рівняння (2) виражається [3, 4] через циліндричні функції Бесселя першого і другого роду першого порядку

$$u_r^a(r) = ARJ_1(k_E r) + BRY_1(k_E r), \tag{3}$$

де $k_E^2 = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho\omega^2$.

Користуючись (1), (3), знаходимо вирази для напружень

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= Re\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}(Aa_1(k_E r) + Bb_1(k_E r) - (1+v_E)d_{13}E_z^a)e^{i\omega t},\\
\sigma_\theta &= Re\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}(Aa_2(k_E r) + Bb_2(k_E r) - (1+v_E)d_{13}E_z^a)e^{i\omega t},
\end{aligned} \tag{4}$$

в яких E_z^a — амплітуда напруженості електричного поля $E_z = \operatorname{Re} E_z^a \exp i\omega t$. Тут використовуються позначення

$$
\begin{aligned}
&a_1(k_E r) = k_E R J_0(k_E r) - (1-\nu_E)\frac{R}{r}J_1(k_E r),\\
&b_1(k_E r) = k_E R Y_0(k_E r) - (1-\nu_E)\frac{R}{r}Y_1(k_E r),\\
&a_2(k_E r) = \nu_E k_E R J_0(k_E r) + (1-\nu_E)\frac{R}{r}J_1(k_E r),\\
&b_2(k_E r) = \nu_E k_E R Y_0(k_E r) + (1-\nu_E)\frac{R}{r}Y_1(k_E r).
\end{aligned} \tag{5}
$$

При внутрішньому жорстко закріпленому краї і зовнішньому вільному краї кільця повинні виконуватись умови

$$
u_r(r_0, t) = 0, \qquad \sigma_r(r_1, t) = 0. \tag{6}
$$

У цьому разі при заданій амплітуді електричної напруги E_z^a невідомі сталі A, B визначаються з системи рівнянь

$$
AJ_1(k_E r_0) + BY_1(k_E r_0) = 0, \qquad Aa_1(k_E r_1) + Bb_1(k_E r_1) = (1+\nu_E)d_{13}E_z^a \tag{7}
$$

і дорівнюють

$$
\begin{aligned}
&A = -(1+\nu_E)d_{13}E_{za}Y_1(k_E r_0)\Delta_{u\sigma}^{-1},\\
&B = (1+\nu_E)d_{13}E_{za}J_1(k_E r_0)\Delta_{u\sigma}^{-1},
\end{aligned} \tag{8}
$$

де визначник

$$
\Delta_{u\sigma} = J_1(k_E r_0)b_1(k_E r_1) - Y_1(k_E r_0)a_1(k_E r_1). \tag{9}
$$

З формул (3), (4), (8) випливає, що резонансні частоти визначаються з частотного рівняння

$$
J_1(k_E r_0)b_1(k_E r_1) - Y_1(k_E r_0)a_1(k_E r_1) = 0. \tag{10}
$$

При високих частотах, користуючись асимптотичними формулами для циліндричних функцій [4]

$$
J_n(z) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad Y_n(z) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{11}
$$

для частотного рівняння (10) знаходимо асимптотичний вираз

$$
\frac{2R}{\pi\sqrt{r_0 r_1}}\cos k_E(r_1 - r_0) \approx 0. \tag{12}
$$

Це значить, що зі збільшенням частот вільних коливань їх можна визначити за асимптотичною формулою

$$
k_E R = \frac{R(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}{r_1 - r_0}, \tag{13}
$$

в якій ціле число $n \gg 1$. Частотний спектр (13) відповідає коливанням за радіальними формами, коли на ширині кільця $r_1 - r_0$ вкладається непарне число чвертей хвилі (чвертьхвильові коливання).

Для струму через електродоване кільце $r_0 < r < r_1$, користуючись формулами [1–3]

$$I = \frac{dQ}{dt}, \qquad Q = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} D_z r dr d\theta, \qquad D_z = d_{13}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \varepsilon_{33}^T E_z, \tag{14}$$

знаходимо вираз

$$I^a = -\omega\frac{2\pi R d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)}\Big[A(r_1J_1(k_Er_1 - r_0J_1(k_Er_0)) + B(r_1Y_1(k_Er_1 - r_0Y_1(k_Er_0))\Big] +$$
$$+ \omega\pi(r_1^2 - r_0^2)\varepsilon_{33}^T(1 - k_p^2)E_z^a. \tag{15}$$

У формулі (15) для амплітуди струму врахована різниця фаз шляхом $I = \mathrm{Re}\, I^a i \exp i\omega t$ і використаний вираз $k_p^2 = 2d_{13}^2/(1-\nu_E)s_{11}^E\varepsilon_{33}^T$ для статичного планарного коефіцієнта зв'язку.

Така процедура аналогічна резонансу напруг в електричному колі [5] при послідовному з'єднанні резистора R, конденсатора C, котушки індуктивності L

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d\xi(t)}{dt}. \tag{16}$$

При гармонічному збуренні напругою $\xi(t) = \xi_0 \sin\omega t$ і $R = 0$ резонансна частота визначається за формулою Томпсона $\omega_r = 1/\sqrt{CL}$.

При заданому струмі $I = \mathrm{Re}\, I^a i \exp i\omega t$ з граничних умов (6) і формули (15) маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&AJ_1(k_Er_0) + BY_1(k_Er_0) = 0,\\
&Aa_1(k_Er_1) + Bb_1(k_Er_1) - (1+\nu_E)d_{13}E_z^a = 0,\\
&\omega\frac{2\pi R d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)}[A(r_1J_1(k_Er_1) - r_0J_1(k_Er_0)) + B(r_1Y_1(k_Er_1) - r_0Y_1(k_Er_0))] +\\
&\qquad + \omega\pi(r_1^2 - r_0^2)\varepsilon_{33}^T(1-k_p^2)E_z^a = -I^a
\end{aligned} \tag{17}$$

для визначення сталих A, B, E_z^a і резонансних частот.

Така процедура аналогічна резонансу струму в електричному колі [5] при паралельному з'єднанні резистора R, конденсатора C, котушки індуктивності L

$$C\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{L}U = \frac{dI_g(t)}{dt}. \tag{18}$$

При гармонічному збуренні струмом $I_g(t) = I_0 \sin\omega t$ і провідності $Y = 1/R = 0$ резонансна частота також визначається за формулою Томпсона $\omega_r = 1/\sqrt{CL}$.

У випадку суцільної круглої пластини в розв'язку (3) і т. д. треба покласти сталу $B = 0$. При заданій електричній напрузі з граничної умови $\sigma_r(R,t) = 0$ одержимо алгебраїчне рівняння

$$Aa_1(k_ER) - (1+\nu_E)d_{13}E_z^a = 0 \tag{19}$$

для визначення сталої A і частотне рівняння для визначення резонансних частот

$$a_1(k_E R) = 0. \tag{20}$$

Заряд на електроді $Q^a = C_{\text{ПЕ}} U$ при $E_z^a = -U/h$, де U — різниця напруг на електродах, і ємності п'єзоелектрика товщиною h

$$C_{\text{ПЕ}} = C^T \left[1 - k_p^2 + (1+\nu_E) k_p^2 \frac{J_1(k_E R)}{a_1(k_E R)}\right]. \tag{21}$$

Ємність діелектрика товщиною h без п'єзоефекту $C^T = \varepsilon_{33}^T \pi R^2 / h$.

Очевидно, що частоти антирезонансного струму знаходяться з частотного рівняння

$$(1 - k_p^2) a_1(k_E R) + (1+\nu_E) k_p^2 J_1(k_E R) = 0. \tag{22}$$

При заданому струмі $I = \operatorname{Re} I^a i \exp i\omega t$ з граничної умови $\sigma_r(R,t) = 0$ і формули для струму через п'єзоелемент одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & a_1(k_E R) A - (1+\nu_E) d_{13} E_z^a = 0, \\ & \omega \frac{2 d_{13}}{s_{11}^E (1-\nu_E)} J_1(k_E R) A + \omega \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) E_z^a = -\frac{I^a}{\pi R^2} \end{aligned} \tag{23}$$

для визначення сталих A, E_z^a і резонансних частот.

З системи (23) знаходимо

$$\begin{aligned} & A = -\frac{1}{\Delta_r(k_E R)} \frac{(1+\nu_E) d_{13} I^a}{\omega \pi R^2 \varepsilon_{33}^T}, \\ & E_z^a = -\frac{a_1(k_E R)}{\Delta_r(k_E R)} \frac{I^a}{\omega \pi R^2 \varepsilon_{33}^T}, \end{aligned} \tag{24}$$

в яких

$$\Delta_r(k_E R) = (1 - k_p^2) a_1(k_E R) + (1+\nu_E) k_p^2 J_1(k_E R).$$

Отже, при заданому струмі на електродах резонансні частоти будуть визначатися з частотного рівняння

$$(1 - k_p^2) a_1(k_E R) + (1+\nu_E) k_p^2 J_1(k_E R) = 0, \tag{25}$$

а частоти антирезонансу напруги — з частотного рівняння

$$a_1(k_E R) = 0. \tag{26}$$

Звернемо увагу на таке: при заданій на електродах напрузі резонансні частоти визначаються з частотного рівняння (20), яке збігається з (26), а частоти антирезонансу струму — з частотного рівняння (22), яке збігається з (25); при заданому на електродах струмі резонансні частоти визначаються з рівняння (25), яке збігається з (22), а частоти антирезонансу напруги — з рівняння (26), яке збігається з (20). Таким чином, рівняння резонансних і антирезонасних частот при заданій на електродах напрузі і при заданому на електродах струмі є інверсними одне до одного. Цей факт випливає також з того, що струм через вібратор $I^a = Y U^a$, де $Y = R^{-1}$ — провідність, R — опір. Дійсно, при заданій напрузі на електродах резонанс буде при $Y = \infty$ $(R = 0)$, а антирезонанс струму — при $Y = 0$ $(R = \infty)$, тоді як при заданому струмі резонанс буде при $Y = 0$ $(R = \infty)$, а антирезонанс напруг — при $Y = \infty$ $(R = 0)$.

1. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
3. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 270 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 736 с.
5. *Павловський М. А.* Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 08.04.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shulga**

On resonance vibrations of laminar piezoelectric vibrators

By the example of vibrations of a laminar piezoelectric vibrator, the resonance and antiresonance frequencies are analyzed in the cases where the electrodes are supplied by an electric voltage (voltage resonance) or an electric current (current resonance). The inversion of resonance and antiresonance frequencies is revealed.