УДК 519.21

С. А. Мельник

Теорема сравнения решений квазилинейных СДУЧП параболического типа со слабыми источниками

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Доведено теорему порівняння розв'язків задачі Коші для СДРЧП параболічного типу. Головна частина рівняння є лінійною. Коефіцієнти дрейфу та дифузії містять в собі нелінійні члени степеневого виду. Показники степенів додатні, але менші за одиницю. Таким чином, рівняння містить в собі слабке детерміноване та слабке стохастичне джерело.

Теоремы сравнения решений играют важную роль в теории дифференциальных уравнений, так как позволяют отслеживать динамику решений и устанавливать единственность решения. Теоремы сравнения решений СДУЧП параболического типа доказывались многими авторами (напр., [1, 2]). Одним из ключевых условий, налагаемых на коэффициенты уравнения, является условие Липшица. Коэффициенты уравнения, рассматриваемого в данной работе, не являются липшицевыми. В то же время такие уравнения активно изучаются, так как являются моделями, описывающими динамику популяций, процессы распространения тепла в нелинейной среде, процессы диффузии газов и т. д.

1. Определения и обозначения. На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{Im}, \mathbf{P})$ рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &du(t,x) = au_{xx}(t,x)dt + c|u(t,x)|^{\beta-1}u(t,x)dt + b|u(t,x)|^{\gamma-1}u(t,x)dw(t), \\ &t \in [0;T], \qquad x \in \mathbb{R}^1, \qquad u(0,x) = u_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $a > 0$, $b > 0$, $c \geqslant 0$, $\beta \in (0;1)$, $\gamma \in (0;1)$, $u_x = \partial u/\partial x$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, $u_0(x)$ — неслучайная функция.

Определение 1. Случайный процесс $u(t,x)$ называется решением задачи (1), если он согласован с винеровским процессом и с вероятностью 1 при каждом $t \in [0;T]$ и произвольной функции $g \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$ удовлетворяет равенству

$$\int u(t,x)g(x)\,dx = \int u_0(x)g(x)\,dx - a\int_0^t\!\!\int u_x(s,x)g_x(x)\,dxds +$$

$$+ c\int_0^t\!\!\int |u(s,x)|^{\beta-1}u(s,x)g(x)\,dxds + b\int_0^t\!\!\int |u(s,x)|^{\gamma-1}u(s,x)g(x)\,dxdw(s).$$

Здесь $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ — пространство Соболева.

Определенные таким образом решения принято называть сильными (в стохастическом смысле) обобщенными (в смысле С. Л. Соболева) решениями задачи (1). Наряду с сильными решениями мы будем рассматривать слабые (в стохастическом смысле) обобщенные решения, которые определены на специально построенном вероятностном пространстве [3, с. 122].

Для доказательства теоремы сравнения нам потребуются некоторые срезывающие и срезанные функции [4, с. 37]. Определим срезывающую функцию следующим равенством:

$$\zeta(u,h)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0{,}5h,\\ k\displaystyle\int\limits_{3-4uh^{-1}}^{1}\exp\Bigl(-\frac{1}{1-r^2}\Bigr)dr, & 0{,}5h<u\leqslant h,\\ 1, & h<u.\end{cases}$$

Здесь $k=\left(\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\exp\Bigl(-\frac{1}{1-r^2}\Bigr)dr\right)^{-1}$, $h>0$.

Определим срезанную функцию $\sigma(u,h,\gamma)=\zeta(u,h)|u|^{\gamma-1}u$, $h>0$. Функция $\sigma(u,h,\gamma)$ обладает следующими свойствами:

1) $|\sigma(u,h,\gamma)|\leqslant|u|^\gamma$;

2) $|\sigma(u,h,\gamma)|\leqslant K(\gamma)(1+|u|)$, $K(\gamma)=\gamma^\gamma(1-\gamma)^{1-\gamma}$, т. е. функция линейно ограничена по u;

3) функция $\sigma(u,h,\gamma)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной u с константой $\mathcal{L}(h)=h^{\gamma-1}(\gamma 2^{1-\gamma}+4K(\gamma)e^{-1})$;

4) $\sigma(u,h,\gamma)$ непрерывно дифференцируема по $u\in(0;+\infty)$ при каждом $h>0$.

Обозначим $\varphi(x)=0{,}5\lambda e^{-\lambda|x|}$, $x\in\mathbb{R}^1$, $\lambda>0$, $\|v\|^p=\displaystyle\int|v(y)|^p dy$, $L_p(\mathbb{R}^1)=\{v(y)\colon\|v\|^p<+\infty\}$, $\|v\|^p_{\varphi,p}=\displaystyle\int|v(y)|^p\varphi(y)\,dy$, $L_p^\varphi(\mathbb{R}^1)=\{v(y):\|v\|^p_{\varphi,p}<+\infty\}$.

Буквой C с индексами будем обозначать различные константы. Там, где это важно, будем указывать, от каких параметров зависит эта константа. $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания по мере $\mathbf{P}$.

2. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $u^{(i)}(t,x)$, $i=1,2$, *— единственные решения задачи* (1), *соответствующие начальным функциям* $u_0^{(i)}(x)$, $i=1,2$, *и коэффициентам* c_1 *и* c_2 *вместо* c. *Если* $0\leqslant c_1<c_2$ *и начальные функции* $u_0^{(i)}\in L_2(\mathbb{R}^1)$, $i=1,2$, *таковы, что* $0\leqslant u_0^{(1)}(x)\leqslant u_0^{(2)}(x)$ *при всех* $x\in\mathbb{R}^1$, *то*

$$\boldsymbol{P}\{u^{(1)}(t,x)\leqslant u^{(2)}(t,x),\forall t\in[0;T],\forall x\in\mathbb{R}^1\}=1.$$

Следствие 1. *Если* $u_0(x)\geqslant 0$, *то решение задачи* (1) *почти наверное неотрицательно.*

3. Вспомогательные результаты. Обозначим $u(t,x,h)$ решение задачи

$$\begin{aligned}&du(t,x,h)=au_{xx}(t,x,h)dt+c\sigma(u(t,x,h),h,\beta)dt+b\sigma(u(t,x,h),h,\gamma)\,dw(t),\\ &t\in[0;T],\qquad x\in\mathbb{R}^1,\qquad u(0,x,h)=u_0(x).\end{aligned}\tag{2}$$

Задача (2) является вспомогательной при доказательстве основной теоремы. Вначале доказывается существование и единственность сильного решения задачи (2). Затем строятся равномерные по h оценки норм решения задачи (2), после чего обосновывается возможность предельного перехода в задаче (2). Это позволяет доказать теорему сравнения решений задачи (1), применив известную теорему сравнения решений задачи (2). Следствием полученных результатов является доказательство существования и единственности слабого решения задачи (1).

Замечание 1. Поскольку функция $\sigma(u,h,\gamma)$ линейно ограничена и удовлетворяет условию Липшица по переменной u, то согласно [5, с. 93, теорема 2.1] при любой $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^1)$ существует единственное сильное решение задачи (2), которое с вероятностью 1 непрерывно по $(t,x) \in (0;+\infty)\times\mathbb{R}^1$. Непрерывность по x следует из компактности вложения пространства $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ в пространство $C(\mathbb{R}^1)$.

Построим равномерные по h оценки норм решения задачи (2). Доказательство лемм 1 и 2 проводится традиционным способом. Вначале применяется формула Ито для квадрата нормы решения задачи (2) в пространстве $L_2^{\varphi}(\mathbb{R}^1)$. Затем, применение неравенств Гельдера, Юнга, Буркхольдера и леммы Гронуолла дает желаемый результат.

Лемма 1. *Если* $\|u_0\|^2 < +\infty$, *то*

$$\boldsymbol{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t,\cdot,h)\|_{\varphi,2}^2 \leqslant C_1(\beta,\gamma,a,b,c,T,\|u_0\|^2,k,\lambda), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}\int_0^T \|u_x(t,\cdot,h)\|_{\varphi,2}^2 ds \leqslant C_2, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E}\int_0^T \|u(t,\cdot,h)\|_{\varphi,\beta+1}^{\beta+1} ds \leqslant C_3, \qquad \boldsymbol{E}\int_0^T \|u(t,\cdot,h)\|_{\varphi,2\gamma}^{2\gamma} ds \leqslant C_4. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы 1, то*

$$\boldsymbol{E}\sup_{|t_2-t_1|\leqslant\varepsilon}\|u(t_2,\cdot,h)-u(t_1,\cdot,h)\|_{\varphi,2}^2 \leqslant C_5\varepsilon,$$

где $C_5 = C_1(a\lambda\delta^{-1}+b^2K(\gamma)+2cK(0{,}5(\beta+1)))+b^2K(\gamma)+2cK(0{,}5(\beta+1))$.

Следствие 2. *Если выполнены условия леммы 1, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{h\to 0}}\sup_{|t_2-t_1|\leqslant\varepsilon}\boldsymbol{P}\{\|u(t_2,\cdot,h)-u(t_1,\cdot,h)\|_{\varphi,2}^2 > \epsilon\} = 0$$

при любом $\epsilon > 0$.

Справедливость следствия вытекает из неравенства Чебышева и леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $\|u_0\|^2 < +\infty$ *и* $u(t,x,h)$ *является решением задачи* (2). *Тогда существует подпоследовательность значений переменной* $h \to 0$ *(вновь обозначаемая* h*) такая, что* $u(t,x,h)$ *сходится к слабому решению задачи* (1) *при всех* $t \in [0;T]$ *и* $x \in \mathbb{R}^1$ *с вероятностью* 1.

Доказательство. Из оценок, полученных в лемме 1, следует, что последовательность функций $\sqrt{\varphi(x)}u(t,x,h)$ при $h \to 0$ слабо компактна в пространстве $L_1(\Omega, C([0;T]; L_2(\mathbb{R}^1)))\bigcap L_2(\Omega\times[0;T]; W_2^1(\mathbb{R}^1))$. Выделим из нее подпоследовательность (которую будем снова обозначать $\sqrt{\varphi(x)}u(t,x,h)$), слабо сходящуюся в указанном пространстве. Теперь используем известный результат А. В. Скорохода о предельном переходе [6, с. 13, теорема, с. 17, замечание 2]. Из леммы 1 следует оценка

$$\sup_{h>0}\sup_{t\in[0;T]}\mathbf{P}\{\|u(t,\cdot,h)\|_{\varphi,2}^2 > \varepsilon\} \leqslant C_1\varepsilon^{-1}.$$

Значит,

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\sup_{h>0}\sup_{t\in[0;T]}\mathbf{P}\{\|u(t,\cdot,h)\|^2_{\varphi,2}>\varepsilon\}=0$$

и выполнено условие (6.2) [6, с.17]. Следствие 2 из леммы 2 обеспечивает выполнение условия (6.1) [6, с.13]. Тогда, согласно упомянутой теореме А. В. Скорохода, существует подпоследовательность значений переменной $h\to 0$ и вероятностное пространство $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathrm{Im}},\widetilde{\mathbf{P}})$ с винеровским процессом $\widetilde{w}(t)$ такие, что последовательность $\sqrt{\varphi(x)}\widetilde{u}(t,x,h)$ при каждом $t\in[0;T]$ с вероятностью 1 слабо сходится в пространстве $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ к некоторому пределу $\sqrt{\varphi(x)}\widetilde{u}(t,x)$. При этом процессы $\widetilde{u}(t,x,h)$ и $u(t,x,h)$ имеют одинаковые конечномерные распределения. Согласно теореме вложения, пространство $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ компактно вложено в пространство $C(\mathbb{R}^1)$. Значит, построенная последовательность $\widetilde{u}(t,x,h)$ сходится к $\widetilde{u}(t,x)$ при всех $t\in[0;T]$, $x\in\mathbb{R}^1$, $\widetilde{\mathbf{P}}$ — почти наверное при $h\to 0$.

Полученные результаты позволяют нам перейти в уравнении (2) к пределу по $h\to 0$. Согласно [7, с. 337, предложение 3.2] уравнение (2) можно записать в форме

$$u(t,x,h)=\int p(t,x-y)u_0(y)\,dy+c\int_0^t\!\!\int p(t-s,x-y)\sigma(u(s,y,h),h,\beta)\,dyds+$$
$$+\,b\int_0^t\!\!\int p(t-s,x-y)\sigma(u(s,y,h),h,\gamma)\,dydw(s). \tag{6}$$

Здесь $p(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi at}}\exp\biggl(-\dfrac{x^2}{4at}\biggr)$.

Так как $\lim\limits_{h\to 0}\widetilde{u}(t,x,h)=\widetilde{u}(t,x)$ при каждом $t\in[0;T]$ и каждом $x\in\mathbb{R}^1$ с вероятностью 1 (по мере $\widetilde{\mathbf{P}}$), то в левой части уравнения (6) в пределе получаем $\widetilde{u}(t,x)$. Покажем, что стохастический интеграл, стоящий в правой части уравнения (6), сходится с вероятностью 1 при всех $t\in[0;T]$, $x\in\mathbb{R}^1$ к $\displaystyle\int_0^t\!\!\int p(t-s,x-y)|\widetilde{u}(s,y)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y)\,dydw(s)$. Рассмотрим

$$I(h)=\int\varphi(x)\Biggl(\int_0^t\!\!\int p(t-s,x-y)(\sigma(\widetilde{u}(s,y,h),h,\gamma)-|\widetilde{u}(s,y)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y))\,dydw(s)\Biggr)^2dx.$$

Докажем, вначале, что $\widetilde{\mathbf{P}}.\lim\limits_{h\to 0}I(h)=0$. Обозначим $U=\sup\limits_{h>0}\sup\limits_{s\in[0;T]}\|\widetilde{u}(s,\cdot,h)\|^2_{\varphi,2}$. При любых $\epsilon>0$, $N>0$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\mathbf{P}}\{I(h)>\epsilon\}\leqslant\widetilde{\mathbf{P}}\{U>N\}+\epsilon^{-1}\widetilde{\mathbf{E}}\{I(h)|U\leqslant N\}. \tag{7}$$

В силу оценки (3) и неравенства Чебышева $\lim\limits_{N\to+\infty}\widetilde{\mathbf{P}}\{U>N\}=0$. Применив неравенство Коши–Буняковского и лемму 4.2 [8], получаем

$$\widetilde{\mathbf{E}}\{I(h)\mid U\leqslant N\}\leqslant$$
$$\leqslant C_5(T,\lambda)\widetilde{\mathbf{E}}\Biggl\{\int_0^t\!\!\int(\sigma(\widetilde{u}(s,y,h),h,\gamma)-|\widetilde{u}(s,y)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y))^2\varphi(y)\,dyds|U\leqslant N\Biggr\}.$$

Так как $(\sigma(\widetilde{u}(s,y,h),h,\gamma) - |\widetilde{u}(s,y)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y))^2 \leqslant 2K(\gamma)(2+\widetilde{u}^2(s,y,h)+\widetilde{u}^2(s,y))$, то

$$\int (\sigma(\widetilde{u}(s,y,h),h,\gamma) - |\widetilde{u}(s,y)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y))^2\varphi(y)\,dyds \leqslant$$
$$\leqslant 2K(\gamma)\big(2+\sup_{s\in[0;t]}\|\widetilde{u}(s,\cdot,h)\|^2_{\varphi,2}+\sup_{s\in[0;t]}\|\widetilde{u}(s,\cdot)\|^2_{\varphi,2}\big).$$

Таким образом, функция, стоящая под знаком условного математического ожидания и интеграла по переменной s, ограничена сверху интегрируемой функцией и по теореме Лебега мы можем перейти к пределу под знаками этих интегралов. Теперь докажем, что $\lim\limits_{h\to 0}\int(\sigma(\widetilde{u}(s,y,h),h,\gamma) - |\widetilde{u}(s,y)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y))^2\varphi(y)\,dyds = 0$ при всех $s\in[0;T]$ с вероятностью 1. Поскольку функция $\sigma(u,h,\gamma)$ непрерывна по (u,h), то справедливо равенство $\lim\limits_{h\to 0}\sigma(\widetilde{u}(t,x,h),h,\gamma) = |\widetilde{u}(t,x)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(t,x)$ при всех $t\in[0;T]$, $x\in\mathbb{R}^1$ с вероятностью 1. Теперь покажем, что рассматриваемый интеграл равномерно непрерывен относительно меры $\Phi(A) = \int\limits_A \varphi(x)\,dx$.

$$0 \leqslant \int\limits_A (\sigma(\widetilde{u}(s,y,h),h,\gamma) - |\widetilde{u}(s,y)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y))^2\varphi(y)\,dyds \leqslant 2(N^\gamma + \|\widetilde{u}(s,\cdot)\|^{2\gamma}_{\varphi,2})\Phi^{1-\gamma}(A).$$

Правая часть полученного неравенства стремится к нулю равномерно по h при $\Phi(A)\to 0$. Указанная сходимость имеет место при всех $s\in[0;T]$ с вероятностью 1. Таким образом, $\lim\limits_{h\to 0}\mathbf{E}_\Phi(\sigma(\widetilde{u}(s,\cdot,h),h,\gamma) - |\widetilde{u}(s,\cdot)|^{\gamma-1}\widetilde{u}(s,y))^2 = 0$ при всех $s\in[0;T]$ с вероятностью 1 по мере $\widetilde{\mathbf{P}}$. В итоге получаем $\lim\limits_{h\to 0}\widetilde{\mathbf{E}}\{I(h)|U\leqslant N\} = 0$.

Перейдем в неравенстве (7) вначале к пределу по $h\to 0$, а затем к пределу по $N\to+\infty$, получим: $\widetilde{\mathbf{P}}.\lim\limits_{h\to 0} I(h) = 0$. Выбрав подпоследовательность, сходящуюся почти наверное, завершаем обоснование сходимости стохастического интеграла в правой части уравнения (6). Обоснование сходимости интеграла Лебега в правой части уравнения (6) производится аналогично.

Все сказанное дает возможность перейти в уравнении (6) к пределу по $h\to 0$ и убедиться, что предельный процесс $\widetilde{u}(t,x)$ также удовлетворяет уравнению (6) и, следовательно, является слабым решением задачи (1). Лемма 3 доказана.

Следствие 3. *Если выполнены условия леммы 1, то существует слабое (в стохастическом смысле) решение задачи* (1).

4. Доказательство теоремы 1. Коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям теоремы 5 [2]. Следовательно,

$$\widetilde{\mathbf{P}}\{0\leqslant \widetilde{u}^{(1)}(t,x,h)\leqslant \widetilde{u}^{(2)}(t,x,h), \forall\, t\in[0;T], \forall\, x\in\mathbb{R}^1\} = 1. \tag{8}$$

Согласно лемме 3

$$\widetilde{\mathbf{P}}\{\lim_{h\to 0}\widetilde{u}^{(i)}(t,x,h) = \widetilde{u}^{(i)}(t,x), \forall\, t\in[0;T], \forall\, x\in\mathbb{R}^1\} = 1, \qquad i=1,2.$$

Перейдя в (8) к пределу по $h\to 0$ убеждаемся, что неравенство $0\leqslant\widetilde{u}^{(1)}(t,x)\leqslant\widetilde{u}^{(2)}(t,x)$ справедливо при всех $t\in[0;T]$, $x\in\mathbb{R}^1$ с вероятностью 1 по мере $\widetilde{\mathbf{P}}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Требование неотрицательности коэффициента c в уравнении (1) является необязательным. Его легко избежать, если в полученных выше оценках заменить c на $|c|$.

Как известно, из справедливости теоремы сравнения следует единственность решения. Таким образом, условия, наложенные нами на исходные данные задачи (1), обеспечивают существование и единственность слабого решения задачи (1). Кроме того, из доказанной теоремы сравнения вытекает справедливость для задачи (1) принципа максимума: если $u_0(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$, то решение задачи (1) остается неотрицательным в течение всего времени существования с вероятностью 1. Отметим также, что доказанная теорема остается справедливой и в случае, когда задача (1) имеет сильное решение. Это следует из того, что согласно теореме А. В. Скорохода при переходе к специальному вероятностному пространству конечномерные распределения процессов сохраняются.

1. *Dalang R. C., Khoshnevisan D., Mueller C. et al.* A minicourse of SPDE. – Salt Lake City, Utah., 2006. – 36 p.
2. *Denis L., Matoussi A., Stoica L.* Maximum principle and comparison theorem for quasi-linear SPDE's // Electron. J. Probab. – 2009. – **14**, No 19. – P. 500–530.
3. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. – Москва: Наука, 1977. – 400 с.
4. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1985. – 495 с.
5. *Pardoux E.* Equations aux derivees partielles stochastiques non lineaires monotones: These doct. math. – Paris, 1975. – 520 p.
6. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961. – 216 с.
7. *Mueller C., Perkins E. A.* The compact support property for solutions to the heat equation with noise // Probab. Theory and Relat. Fields. – 1992. – **93**. – P. 325–358.
8. *Sturm A.* On convergence of population processes in random environments to the stochastic heat equation with colored noise // Electron. J. Probab. – 2003. – **8**, No 6. – P. 1–39.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 06.05.2010

S. A. Melnik

Comparison theorem for solutions of quasi-linear parabolic SPDEs with weak sources

The comparison theorem for a nonlinear stochastic heat equation is proved. Factors of drift and diffusion contain nonlinear members of a power kind. Indices of degrees are positive numbers less than one.