УДК 517.929

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк, Т. А. Лукьянова**

Об экспоненциальной устойчивости комплекснозначной нейронной сети на временной шкале

Отримано достатні умови рівномірної експоненціальної стійкості в цілому стану рівноваги нейронної комплекснозначної системи на часовій шкалі. Наведено достатні умови регресивності функції системи. Ефективність отриманих достатніх умов проілюстровано на прикладі.

Комплекснозначные нейронные сети широко используются для решения прикладных задач в различных областях современных технологий, таких как оптоэлектроника, воспроизведение изображений, синтез речи, машинное зрение, дистанционный сбор данных, квантовые аппараты, пространственно-временной анализ физиологических нейронных аппаратов и систем [1, 2]. Поэтому исследованию комплекснозначных нейронных сетей посвящена обширная литература (см. [3, 4] и приведенную там библиографию). Задача о динамике такой сети на временной шкале (как и задача о динамике вещественнозначной нейронной сети на временной шкале [5–8]) является новой областью исследований и начала развиваться только в последние годы [9]. Исследование комплекснозначной нейронной сети на временной шкале позволяет дать одновременное описание динамики таких систем в непрерывном и дискретном случаях. Кроме того, такой подход позволяет получать новые результаты для дискретных комплекснозначных нейронных систем, аналогичные уже известным для непрерывного случая.

В данной работе исследуется экспоненциальная устойчивость комплекснозначной нейронной сети на временной шкале. Подход, предложенный в работе [3], распространяется на случай таких систем.

Основные определения и обозначения. Временной шкалой $\mathbb{T}$ называется произвольное непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Основные понятия и теоремы математического анализа на временной шкале, такие как определения производной и интеграла, правила дифференцирования и интегрирования, определение экспоненциальной функции, регрессивной, rd-непрерывной функций и пространства $\mathcal{R}^+$ подробно изложены в работах [10, 11]. Ниже приведем только некоторые самые необходимые понятия и определения.

Обозначим через $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел. Δ-производной комплексно значной функции $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}^n$ на временной шкале $\mathbb{T}$ будем называть функцию $z^{\Delta}(t) = (\operatorname{Re} z(t))^{\Delta} + i(\operatorname{Im} z(t))^{\Delta}$.

Функция $f \colon \mathbb{T} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ называется регрессивной, если оператор $I + \mu(t) f(t, \cdot)$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$ обратим. Здесь $I \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — единичный оператор.

Ниже будем использовать следующие обозначения: $[a, +\infty)_{\mathbb{T}} = [a, +\infty) \bigcap \mathbb{T}$ при $a \in \mathbb{T}$, $|\omega|$ — модуль комплексного числа ω, $\overline{\omega}$ — число, комплексно сопряженное к ω. Если $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор с комплексными компонентами, то $z^* = (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n)$, $\|z\|^2 = z^* z = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2$. Если $A = \{a_{ij}\}$ — матрица с комплексными элементами, то $|A| = \{|a_{ij}|\}$, $A^{\mathrm{T}} = \{a_{ji}\}$, $A^* = \{\overline{a}_{ji}\}$, $\lambda_m(A)$, $\lambda_M(A)$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы A соответственно, $\|A\| = (\lambda_M(A^*A))^{1/2}$.

Рассмотрим комплекснозначную нейронную сеть, динамика которой описывается уравнениями вида

$$z^{\Delta}(t) = -Bz(t) + Ts(z(t)) + u, \qquad t \in \mathbb{T}_{\tau}. \tag{1}$$

Решение $z(t; t_0, z_0)$ при $t = t_0$ принимает значение z_0, т. е.

$$z(t_0; t_0, z_0) = z_0, \qquad t_0 \in \mathbb{T}_{\tau}, \qquad z_0 \in \mathbb{C}^n, \tag{2}$$

где $\mathbb{T}_{\tau} = [\tau, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $\tau \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ — произвольная временная шкала для которой $\sup \mathbb{T} = +\infty$. В системе (1) $z^{\Delta}(t)$ — Δ-производная на временной шкале $\mathbb{T}$, вектор $z \in \mathbb{C}^n$ характеризует состояние нейронов, $T = \{t_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, компоненты t_{ij} описывают связи между i-м и j-м нейронами, $s\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $s(z) = (s_1(z_1), s_2(z_2), \ldots, s_n(z_n))^{\mathrm{T}}$, функция s_i описывает ответ i-го нейрона, $B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $u \in \mathbb{C}^n$ — постоянный вектор внешнего входа.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $z^{\Delta} = dz/dt$ и начальная задача (1), (2) эквивалентна начальной задаче для непрерывной комплекснозначной нейронной системы типа Хопфилда [3]

$$\frac{dz(t)}{dt} = -Bz(t) + Ts(z(t)) + u, \qquad t \geqslant \tau,$$
$$z(t_0; t_0, z_0) = z_0, \qquad t_0 \geqslant \tau, \qquad z_0 \in \mathbb{C}^n.$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $z^{\Delta}(k) = z(k+1) - z(k) = \Delta z(k)$, $\mathbb{T}_{\tau} = \{\tau, \tau+1, \tau+2, \ldots\}$ и начальная задача (1), (2) эквивалентна следующей [3]:

$$z(k+1) = -Bz(k) + Ts(z(k)) + u, \qquad t \in \{\tau, \tau+1, \tau+2, \ldots\},$$
$$z(k_0; k_0, z_0) = z_0, \qquad k_0 \in \{\tau, \tau+1, \tau+2, \ldots\}, \qquad z_0 \in \mathbb{C}^n.$$

Относительно системы (1) введем следующие предположения.

Предположение 1. *Функция $f(z) = -Bz + Ts(z) + u$ является регрессивной.*

Предположение 2. *Существуют положительные постоянные $l_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что при всех ϱ, $\omega \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства*

$$|s_i(\varrho) - s_i(\omega)| \leqslant l_i|\varrho - \omega|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если выполняются условия предположений 1 и 2, то при любых начальных данных $(t_0, z_0) \in \mathbb{T}_{\tau} \times \mathbb{C}^n$ задача (1), (2) имеет точно одно решение на $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Условия существования единственного состояния равновесия системы (1) приведены в работе [9].

Лемма 1. *Предположим, что функция $s\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ такая, что $s(0) = 0$ и существует положительная постоянная $L > 0$ такая, что $|s(z) - s(\varsigma)| \leqslant L|z - \varsigma|$ при всех z, $\varsigma \in \mathbb{C}^n$. Определим постоянную $\beta = \|I - B\| + L\|T\|$. Если $\beta \in (0, 1)$, то система (1) имеет единственное состояние равновесия.*

Обозначим $\gamma(t) = \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)$, $\overline{b} = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $L = \max\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ и докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение 2 и $s(0) = 0$. Если $\gamma(t) < 1$ при всех $t \in \mathbb{T}$, то функция $f(z) = -Bz + Ts(z) + u$ регрессивна для любого $u \in \mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Для доказательства леммы 2 требуется показать, что отображение $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, заданное формулой $F(z) = z + \mu(t)(-Bz + Ts(z) + u)$, обратимо при каждом фиксированном $t \in \mathbb{T}$, т.е. что при любом фиксированном $t \in \mathbb{T}$ уравнение $F(z) = w$ имеет единственное решение при всех $w \in \mathbb{C}^n$.

Зафиксируем $t \in \mathbb{T}$. Если $\mu(t) = 0$, то уравнение $F(z) = w$ имеет единственное решение $z = w$. Пусть теперь $\mu(t) \neq 0$. В этом случае уравнение $F(z) = w$ имеет единственное решение, если и только если отображение $G\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, заданное формулой $G(z) = w - \mu(t)(-Bz + Ts(z) + u)$, имеет единственную неподвижную точку.

Для любого $z \in S_d(0)$, где $d > (\mu(t)\|u\| + \|w\|)/(1 - \gamma(t))$, верны неравенства

$$\|G(z)\| \leqslant \|w\| + \mu(t)(\|B\| + L\|T\|)\|z\| + \mu(t)\|u\| \leqslant \gamma(t)d + \mu(t)\|u\| + \|w\| < d,$$

что означает, что $G(S_d(0)) \subset S_d(0)$. Покажем, что отображение G является сжимающим. При любых z_1, $z_2 \in \mathbb{C}^n$ верны неравенства

$$\begin{aligned}\|G(z_1) - G(z_2)\| &= \mu(t)\| - B(z_2 - z_1) + T(s(z_2) - s(z_1)\| \leqslant \\ &\leqslant \mu(t)(\|B\| + L\|T\|)\|z_2 - z_1\| \leqslant \gamma(t)\|z_2 - z_1\|.\end{aligned}$$

Поскольку $\gamma(t) < 1$, то согласно принципу сжимающих отображений, отображение G имеет единственную неподвижную точку. Лемма 2 доказана.

Экспоненциальная устойчивость нейронной сети. Предположим, что система (1) имеет изолированное состояние равновесия z_e.

Определение 1. Состояние равновесия $z(t) \equiv z_e$ системы (1) называется равномерно экспоненциально устойчивым в целом, если существует функция $p \in \mathcal{R}^+$ такая, что $e_p(t, t_0) \to 0$ при $t \to \infty$ и существуют постоянные $N = N(z_0) > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\|z(t; t_0, z_0) - z_e\| \leqslant N(e_p(t, t_0))^\alpha$ при всех $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$ и $t \in [t_0, +\infty)_\mathbb{T}$.

Сделаем замену переменных $\xi(t) = z(t) - z_e$ и перепишем начальную задачу (1), (2) в виде

$$\begin{aligned}&\xi^\Delta(t) = -B\xi(t) + Tg(\xi(t)), \qquad t \in \mathbb{T}_\tau, \\ &\xi(t_0; t_0, \xi_0) = \xi_0, \qquad t_0 \in \mathbb{T}_\tau, \qquad \xi_0 \in \mathbb{C}^n,\end{aligned} \tag{3}$$

где $g(\xi) = s(\xi + z_e) - s(z_e)$.

Ясно, что поведение решения $z(t)$ системы (1) в окрестности состояния равновесия z_e эквивалентно поведению решения $\xi(t)$ системы (3) в окрестности нуля.

Обозначим $\omega(t) = (|\xi_1(t)|, |\xi_2(t)|, \ldots, |\xi_n(t)|)^\mathrm{T}$, $\Lambda = \mathrm{diag}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ и докажем такое вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Если $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то для Δ-производной функции $V(t) = \xi^*(t)Q\xi(t)$ вдоль решения системы* (3) *при всех $t \in \mathbb{T}_\tau$ верно неравенство*

$$V^\Delta(t)|_{(3)} \leqslant \xi^*(t)A(t)\xi(t) + \omega(t)^T C(t)\omega(t),$$

где

$$A(t) = -BQ - QB + \mu(t)BQB, \tag{4}$$

$$C(t) = \Lambda|T|^T|Q| + |Q||T|\Lambda + \mu(t)(\Lambda|T|^T|Q|B + B|Q||T|\Lambda) + \mu(t)\Lambda|T|^T|Q||T|\Lambda. \tag{5}$$

В частности, если $Q = \mathrm{diag}\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ *— диагональная матрица, то при всех* $t \in \mathbb{T}_\tau$ *имеет место неравенство*

$$V^\Delta(t)|_{(3)} \leqslant \omega(t)^T D(t)\omega(t),$$

где

$$D(t) = A(t) + C(t). \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим $\omega(t) = \omega$, $\xi(t) = \xi$, $\mu(t) = \mu$, $g(\xi(t)) = g$, и поскольку

$$(\xi^* Q\xi)^\Delta = (\xi^*)^\Delta Q\xi^\sigma + \xi^* Q\xi^\Delta = (\xi^\Delta)^* Q\xi^\sigma + \xi^* Q\xi^\Delta = (\xi^\Delta)^* Q(\xi + \mu\xi^\Delta) + \xi^* Q\xi^\Delta =$$
$$= (\xi^\Delta)^* Q\xi + \xi^* Q\xi^\Delta + \mu(\xi^\Delta)^* Q\xi^\Delta,$$

то будем иметь равенства

$$V^\Delta(t)|_{(3)} = (-B\xi + Tg)^* Q\xi + \xi^* Q(-B\xi + Tg) + \mu(-B\xi + Tg)^* Q(-B\xi + Tg) =$$
$$= -\xi^* BQ\xi - \xi^* QB\xi + \mu\xi^* BQB\xi + g^* T^* Q\xi + \xi^* QTg - \mu g^* T^* QB\xi -$$
$$- \mu\xi^* BQTg + \mu g^* T^* QTg = \xi^*[-BQ - QB + \mu BQB]\xi + 2\,\mathrm{Re}\{\xi^* QTg\} -$$
$$- 2\mu\,\mathrm{Re}\{\xi^* BQTg\} + \mu g^* T^* QTg.$$

Рассмотрим отдельно второе из слагаемых:

$$\mathrm{Re}\{\xi^* QTg\} \leqslant |\xi^* QTg| = |\sum_{\nu,k,j} \overline{\xi}_\nu q_{\nu k} t_{kj} g_j| \leqslant \sum_{\nu,k,j} |\xi_\nu||q_{\nu k}||t_{kj}||g_j| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu,k,j} |\xi_\nu||q_{\nu k}||t_{kj}|l_j|\xi_j| = \omega^{\mathrm{T}}|Q||T|\Lambda\omega.$$

Оценив аналогичным способом третье и четвертое слагаемые, для Δ-производной функции $V(t) = \xi^*(t)Q\xi(t)$ вдоль решения системы (3) получим оценку

$$V^\Delta(t)|_{(3)} \leqslant \xi^*[-BQ - QB + \mu(t)BQB]\xi + 2\omega^{\mathrm{T}}|Q||T|\Lambda\omega +$$
$$+ 2\mu\omega^{\mathrm{T}} B|Q||T|\Lambda\omega + \mu\omega^{\mathrm{T}}\Lambda|T|^{\mathrm{T}}|Q||T|\Lambda\omega \leqslant \xi^* A(t)\xi + \omega^{\mathrm{T}} C(t)\omega,$$

что и требовалось доказать.

Если матрица Q диагональная, то матрица $A(t)$ также диагональная и

$$V^\Delta(t)|_{(3)} \leqslant \xi^* A(t)\xi + \omega^{\mathrm{T}} C(t)\omega = A(t)\xi^*\xi + \omega^{\mathrm{T}} C(t)\omega = A(t)\omega^{\mathrm{T}}\omega + \omega^{\mathrm{T}} C(t)\omega =$$
$$= \omega^{\mathrm{T}} A(t)\omega + \omega^{\mathrm{T}} C(t)\omega = \omega^{\mathrm{T}} D(t)\omega.$$

Лемма 3 доказана.

Сформулируем теперь достаточные условия экспоненциальной устойчивости.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия предположений 1 и 2. Если существует положительно определенная эрмитова матрица* $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, для которой функция*

$$p(t) = \frac{\lambda_M(A(t)) + \lambda_M(C(t))}{\lambda_m(Q)}, \qquad t \in \mathbb{T}_\tau,$$

где матрицы $A(t)$ и $C(t)$ задаются формулами (4) и (5), такова, что $p \in \mathcal{R}^+$ и $\lim\limits_{t\to\infty} e_p(t,t_0) = 0$, то состояние равновесия $z(t) \equiv z_e$ системы (1) равномерно экспоненциально устойчиво в целом.

Доказательство. Обозначим через $\xi(t)$ произвольное решение системы (3) и рассмотрим функцию $V(\xi) = \xi^* Q \xi$. Для Δ-производной функции $V(\xi(t))$ вдоль решения системы (3) в силу леммы 3 верны неравенства

$$V^{\Delta}(\xi(t))|_{(3)} \leqslant \xi^*(t)A(t)\xi(t) + \omega(t)^{\mathrm{T}}C(t)\omega(t) \leqslant \lambda_M(A(t))\xi^*(t)\xi(t) + \lambda_M(C(t))\omega^{\mathrm{T}}\omega =$$
$$= [\lambda_M(A(t)) + \lambda_M(C(t))]\|\xi(t)\|^2 \leqslant \frac{\lambda_M(A(t)) + \lambda_M(C(t))}{\lambda_m(Q)} V(\xi(t)) = p(t)V(\xi(t)).$$

Отсюда, в соответствии с теоремой 6.1 из монографии [11], при всех $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$, получаем оценку

$$V(\xi(t)) \leqslant V(\xi_0)e_p(t,t_0),$$

или

$$\xi^*(t)\xi(t) \leqslant V(\xi_0)\lambda_m^{-1}(Q)e_p(t,t_0),$$

откуда и следует равномерная экспоненциальная устойчивость в целом нулевого состояния равновесия системы (3).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия предположений 1 и 2. Если существует положительно определенная эрмитова матрица $Q = \mathrm{diag}\{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, для которой функция $p(t) = \lambda_M(D(t))\lambda_m(Q)^{-1}$, где матрица $D(t)$ задается формулой (6), такова, что $p \in \mathcal{R}^+$ и $\lim\limits_{t\to\infty} e_p(t,t_0) = 0$, то состояние равновесия $z(t) \equiv z_e$ системы (1) равномерно экспоненциально устойчиво в целом.*

Пример. На произвольной временной шкале $\mathbb{T}$ рассмотрим двухкомпонентную комплексно-значную нейронную сеть вида

$$\begin{aligned} z_1^{\Delta}(t) &= -b_1 z_1(t) + t_{11}s(z_1(t)) + t_{12}s(z_2(t)) + u_1, \\ z_2^{\Delta}(t) &= -b_2 z_2(t) + t_{21}s(z_1(t)) + t_{22}s(z_2(t)) + u_2, \end{aligned} \tag{7}$$

где z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $s(u) = \mathrm{th}\, u$, $b_1 = b_2 = 0{,}1$, $u_1 = -0{,}0243 + 0{,}2667\mathrm{i}$, $u_2 = -0{,}1659 + 0{,}0895\mathrm{i}$ и

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}0208 + 0{,}0208\mathrm{i} & -0{,}0416 + 0{,}0208\mathrm{i} \\ 0{,}0625 - 0{,}0416\mathrm{i} & -0{,}0208 + 0{,}0208\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Система (7) имеет состояние равновесия $z_e = (0{,}3756 + 2{,}4541\mathrm{i};\ -1{,}4066 + 0{,}0724\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$.

Учитывая, что $l_1 = l_2 = 1$, $L = 1$, $\|T\| = 0{,}0913$, $\gamma(t) = 0{,}1913\mu(t)$, условие регрессивности функции $f(z)$ примет вид $\mu(t) < 5{,}2247$.

Выберем матрицу $Q = I$ и вычислим матрицы

$$|T| = \begin{pmatrix} 0{,}0294 & 0{,}0465 \\ 0{,}0751 & 0{,}0294 \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -0{,}2 + 0{,}01\mu(t) & 0 \\ 0 & -0{,}2 + 0{,}01\mu(t) \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0{,}0589 + 0{,}0137\mu(t) & 0{,}1217 + 0{,}1260\mu(t) \\ 0{,}1217 + 0{,}1260\mu(t) & 0{,}0589 + 0{,}0095\mu(t) \end{pmatrix}.$$

Для временной шкалы $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ функция зернистости $\mu(t) \equiv 0$ и

$$D(t) = \begin{pmatrix} -0{,}1293 & 0{,}1217 \\ 0{,}1217 & -0{,}1293 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_M(D(t)) = -0{,}0075$, будем иметь функцию $p(t) = -0{,}075$ и $e_p(t,t_0) = e^{p(t-t_0)} = e^{-0{,}0075(t-t_0)} \to 0$. Так как выполнены все условия теоремы 2, то состояние равновесия $z(t) \equiv z_e$ системы (7) равномерно экспоненциально устойчиво в целом.

Для временной шкалы $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ функция зернистости $\mu(t) \equiv 1$ и

$$A(t) = \begin{pmatrix} -0{,}19 & 0 \\ 0 & -0{,}19 \end{pmatrix}, \qquad C(t) = \begin{pmatrix} 0{,}0589 & 0{,}1217 \\ 0{,}1217 & 0{,}0589 \end{pmatrix}.$$

Так как $\lambda_M(A(t)) + \lambda_M(C(t)) = -0{,}0093$, то будем иметь функцию $p(t) = -0{,}0093$ и $e_p(t,t_0) = (1 + p)^{t-t_0} = 0{,}9907^{t-t_0} \to 0$. При этом выполнены все условия теоремы 1 и, следовательно, состояние равновесия $z(t) \equiv z_e$ системы (7) равномерно экспоненциально устойчиво в целом.

Заметим, что применить теорему 4.4 из работы [9] для исследования уравнений (7) не представляется возможным, поскольку $\psi = -0{,}2 + \beta^{-1} + 0{,}0913\beta > 0$ при всех $\beta > 0$.

Таким образом, в данной работе, в рамках обобщенного второго метода Ляпунова, получены достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости в целом состояния равновесия комплекснозначной нейронной сети. Кроме того, получены достаточные условия регрессивности функции $-Bz(t) + Ts(z(t)) + u$. В качестве примера рассмотрена двухкомпонентная нейронная сеть, которая не может быть исследована на основе результатов работы [9].

1. *Lee D.-L.* Complex-valued neural associative memories: network stability and learning algorithm // Complex-valued neural networks. V of Series on innovative intelligence. – River Edge, NJ: World Publ., 2003. – P. 29–55.
2. *Complex-valued* neural networks: Theories and applications // V of the Series on innovative intelligence / Ed. A. Hirose. – River Edge, NJ: World Publ., 2003. – 388 p.
3. *Complex-valued* neural networks: utilizing high-dimensional parameters / Ed. T. Nitta. – Pennsylvania, USA: Information Science Reference, 2009. – 504 p.
4. *Rao V. S. H., Murthy G. R.* Global dynamics of a class of complex valued neural networks // Int. J. Neural Syst. – 2008. – **18**, No 2. – P. 165–171.
5. *Chen A., Du D.* Global exponential stability of delayed BAM network on time scale // Neurocomputing. – 2008. – **71**. – P. 3582–3588.
6. *Li Y., Chen X., Zhao L.* Stability and existence of periodic solutions to delayed Cohen-Grossberg BAM neural networks with impulses on time scales // Ibid. – 2009. – **72**. – P. 1621–1630.
7. *Мартынюк А. А., Лукьянова Т. А.* Об устойчивости нейронной сети на временной шкале // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 21–26.
8. *Лукьянова Т. А., Мартынюк А. А.* Об асимптотической устойчивости нейронной сети на временной шкале // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 3. – С. 346–360.
9. *Bohner M., Rao V. S. H., Sanyal S.* Global stability of complex-valued neural networks on time scales // Missouri University of Science and Technology, USA. – 2009. – 11 p. – Manuscript.
10. *Бохнер М., Мартынюк А. А.* Элементы теории устойчивости А. М. Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 3–27.
11. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: an introduction with applications. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 358 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.05.2010

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk, T. A. Lukyanova**

On exponential stability of a complex-valued neural network on the time scale

We present new stability results for the complex-valued neural systems on time scales. The sufficient conditions of regressivity are given. The efficiency of the obtained sufficient conditions is tested by the numerical example.