УДК 517.929

Г. П. Пелюх, А. В. Вельгач

Періодичні розв'язки систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу і їх властивості

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Одержано достатні умови існування неперервно-диференційовних, T-періодичних розв'язків одного класу систем диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу і досліджено їх властивості.

Системи диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(kt + \varphi(t)), x'(lt + \psi(t))), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; A — стала дійсна $(n \times n)$-матриця; $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi\colon \mathbb{R} \to R$; k, l — деякі цілі додатні числа, вивчалися багатьма математиками (див. [1, 2] і цитовану в них літературу) і в даний час ряд важливих питань їх теорії досить добре вивчено. Особливо це стосується питань існування і єдиності періодичних розв'язків таких рівнянь [3–7]. Ці питання розглядаються також в даній роботі. При цьому припускаються виконаними такі умови:

1) $|e^{At}| \leqslant Ne^{-\alpha t}$ при $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, де α — деяка додатна стала;
2) вектор-функція $f(t, x, y)$ є неперервною при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ і T-періодичною по t;
3) для довільних $t \in \mathbb{R}$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}} \in \mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$|f(t, \overline{x}, \overline{y}) - f(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})| \leqslant L(|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| + |\overline{y} - \overline{\overline{y}}|),$$

де L — деяка додатна стала;
4) $\sup\limits_t |f(t, 0, 0)| = f^* < \infty$;
5) $\varphi(t)$, $\psi(t)$ є неперервними T-періодичними функціями;
6) $\Delta = 2LK < 1$, де $K = \max\left\{\dfrac{N}{\alpha}, |A|\dfrac{N}{\alpha} + 1\right\}$.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1–6. Тоді система R(1)R має неперервно-диференційовний при $t \in \mathbb{R}$, T-періодичний розв'язок $\gamma(t)$.*

Доведення. Покажемо, що система (1) має T-періодичний розв'язок у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t), \tag{2}$$

де $x_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервно-диференційовні при $t \in \mathbb{R}$, T-періодичні вектор-функції, що є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0'(t) = Ax_0(t) + f(t, 0, 0), \tag{3_0}$$

$$x_j'(t) = Ax_j(t) + f\left(t, \sum_{i=0}^{j-1} x_i(kt+\varphi(t)), \sum_{i=0}^{j-1} x_i'(lt+\psi(t))\right) -$$

$$- f\left(t, \sum_{i=0}^{j-2} x_i(kt+\varphi(t)), \sum_{i=0}^{j-2} x_i'(lt+\psi(t))\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{3_j}$$

де $x_{-1}(t) \equiv 0$.

Неважко переконатися, що вектор-функція

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau, 0, 0)\, d\tau \tag{4_0}$$

є неперервно-диференційовним розв'язком системи (3_0) і $x_0(t+T) = x_0(t)$.

Враховуючи умови 1 і 4, знаходимо

$$\begin{gathered} |x_0(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{t} |e^{A(t-\tau)}|\,|f(\tau,0,0)| d\tau \leqslant Nf^* \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{N}{\alpha} f^* \leqslant M, \\ |x_0'(t)| \leqslant |A| \left| \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau, 0, 0)\, d\tau \right| + |f(t,0,0)| \leqslant \left(|A| \frac{N}{\alpha} + 1 \right) f^* \leqslant M, \end{gathered} \tag{5_0}$$

де $M = Kf^*$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3_j), $j = 1, 2, \ldots$, покажемо, що вектор-функції

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} \left(f\left(\tau, \sum_{i=0}^{j-1} x_i(k\tau+\varphi(\tau)), \sum_{i=0}^{j-1} x_i'(l\tau+\psi(\tau))\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\tau, \sum_{i=0}^{j-2} x_i(k\tau+\varphi(\tau)), \sum_{i=0}^{j-2} x_i'(l\tau+\psi(\tau))\right)\right) d\tau \tag{4_j}$$

є T-періодичними розв'язками відповідних систем рівнянь (3_j), $j = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються умови

$$|x_j(t)| \leqslant M\Delta^j, \qquad |x_j'(t)| \leqslant M\Delta^j, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{5_j}$$

Справді, враховуючи (5_0) і умови 1–6, неважко показати, що оцінки (5_j) мають місце. Розмірковуючи по індукції, припустимо, що неперервно-диференційовний T-періодичний розв'язок $x_j(t)$ системи (3_j), $j \geqslant 1$, який визначається формулою (4_j), задовольняє умови (5_j). Тоді, в силу умов теореми, вектор-функція $x_{j+1}(t)$, що визначається співвідношенням (4_{j+1}), є неперервно-диференційовною при $t \in \mathbb{R}$ і T-періодичною. Більше цього, враховуючи умови теореми і (5_j), отримуємо

$$|x_{j+1}(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{t} \left| e^{A(t-\tau)} \right| L(|x_j(k\tau+\varphi(\tau))| + |x_j'(l\tau+\psi(\tau))|)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2LM\Delta^j N \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = 2L\frac{N}{\alpha} M\Delta^j \leqslant M\Delta^{j+1},$$

$$|x'_{j+1}(t)| \leqslant |A||x_{j+1}(t)| + L(|x_j(kt+\varphi(t))| + |x'_j(lt+\psi(t))|) \leqslant$$
$$\leqslant |A| 2L\frac{N}{\alpha} M\Delta^j + 2LM\Delta^j = 2L\biggl(|A|\frac{N}{\alpha}+1\biggr) M\Delta^j \leqslant M\Delta^{j+1}.$$

Таким чином, всі вектор-функції $x_j(t)$, $j=0,1,\ldots$, є неперервно-диференційовними T-періодичними вектор-функціями, що задовольняють умови (5_j). Звідси безпосередньо випливає, що ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j(t)$ (разом із першою похідною) рівномірно збігається при всіх $t\in\mathbb{R}$ до деякої неперервно-диференційовної T-періодичної вектор-функції $\gamma(t)$.

Беручи до уваги умови теореми, можна показати, що побудована вектор-функція $\gamma(t)$ є розв'язком системи (1). Для цього достатньо довести, що ряд

$$f(t,0,0) + \sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(f\Biggl(t, \sum_{j=0}^{i} x_j(t), \sum_{j=0}^{i} x'_j(t)\Biggr) - f\Biggl(t, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(t), \sum_{j=0}^{i-1} x'_j(t)\Biggr)\Biggr)$$

рівномірно збігається при всіх $t\in\mathbb{R}$ до вектор-функції $f\Bigl(t, \sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j(t), \sum\limits_{j=0}^{\infty} x'_j(t)\Bigr)$. Теорема доведена.

Виконуючи в (1) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — неперервно-диференційовний T-періодичний розв'язок системи (1), отримаємо систему рівнянь для $y(t)$:

$$y'(t) = Ay(t) + \widetilde{f}(t, y(kt+\varphi(t)), y'(lt+\psi(t))), \tag{6}$$

де $\widetilde{f}(t, y(kt+\varphi(t)), y'(lt+\psi(t))) = f(t, y(kt+\varphi(t)) + \gamma(kt+\varphi(t)), y'(lt+\psi(t)) + \gamma'(lt+\psi(t))) - f(t, \gamma(kt+\varphi(t)), \gamma'(lt+\psi(t)))$. Легко переконатися, що $\widetilde{f}(t,0,0)\equiv 0$ і вектор-функція $\widetilde{f}(t,x,y)$ задовольняє умову 3.

При деяких додаткових умовах система рівнянь (6) має багато неперервно-диференційовних при $t\geqslant 0$ розв'язків. Дійсно, розглянемо систему рівнянь

$$y'(t) = Ay(t) + \widetilde{f}(t, y(kt), y'(lt)), \tag{7}$$

яка одержується із (6) при $\varphi(t)\equiv 0$, $\psi(t)\equiv 0$, і доведемо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і умова*

7) $\widetilde{\Delta} = 2L\widetilde{K} < 1$, *де* $\widetilde{K} = \max\Bigl\{\dfrac{N}{\alpha-\beta}, |A|\dfrac{N}{\alpha-\beta}+1\Bigr\}$, $0<\beta<\alpha$.

Тоді система рівнянь (7) *має сім'ю неперервно-диференційовних при* $t\in\mathbb{R}^+$ *розв'язків* $y(t)=y(t,C)$, *де* C *— довільний сталий вектор розмірності* n, *у вигляді ряду:*

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j(t), \tag{8}$$

де $y_j(t)$, $j=0,1,\ldots$, *— деякі неперервно-диференційовні при* $t\in\mathbb{R}^+$ *вектор-функції, що є розв'язками послідовності систем рівнянь*

$$y'_0(t) = Ay_0(t), \tag{9_0}$$

$$y'_j(t) = Ay_j(t) + \widetilde{f}\left(t, \sum_{i=0}^{j-1} y_i(kt), \sum_{i=0}^{j-1} y'_i(lt)\right) -$$
$$- \widetilde{f}\left(t, \sum_{i=0}^{j-2} y_i(kt), \sum_{i=0}^{j-2} y'_i(lt)\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{9_j}$$

де $y_{-1}(t) \equiv 0$.

Доведення. Оскільки система (9_0) має сім'ю неперервно-диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $y_0(t) = e^{At}C$, де C — довільний сталий вектор розмірності n (далі будемо припускати, що $|C| \leqslant 1$), то в силу умови 1 маємо:

$$\begin{aligned} &|y_0(t)| = |e^{At}C| \leqslant |e^{At}|\,|C| \leqslant Ne^{-\alpha t}|C| \leqslant \widetilde{M}e^{-\beta t}, \\ &|y'_0(t)| \leqslant |A|\,|e^{At}|\,|C| \leqslant |A|Ne^{-\alpha t}|C| \leqslant \widetilde{M}e^{-\beta t}, \end{aligned} \tag{10_0}$$

де $\widetilde{M} = \max\{N, |A|N\}$, $\beta < \alpha$.

Послідовно можна переконатися, що розв'язками систем рівнянь (9_j), $j = 1, 2, \ldots$ є вектор-функції

$$y_j(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\left(\widetilde{f}\left(\tau, \sum_{i=0}^{j-1} y_i(k\tau), \sum_{i=0}^{j-1} y'_i(l\tau)\right) - \widetilde{f}\left(\tau, \sum_{i=0}^{j-2} y_i(k\tau), \sum_{i=0}^{j-2} y'_i(l\tau)\right)\right)d\tau.$$

Покажемо, що при $t \in \mathbb{R}^+$ для вектор-функцій $y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, виконуються оцінки

$$|y_j(t)| \leqslant \widetilde{M}\Delta^j e^{-\beta t}, \qquad |y'_j(t)| \leqslant \widetilde{M}\Delta^j e^{-\beta t}. \tag{10_j}$$

Дійсно, враховуючи оцінки (10_0) і умови теореми, неважко показати, що мають місце оцінки (10_1). Припустимо, що оцінки (10_j) доведені уже для деякого $j \geqslant 1$, і покажемо їх справедливість для $j+1$. Дійсно, в силу умов теореми і (10_j), отримуємо

$$|y_{j+1}(t)| \leqslant \int_0^t |e^{A(t-\tau)}| L(|y_j(k\tau)| + |y'_j(l\tau)|)\, d\tau \leqslant N\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} L(\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta k\tau} + \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta l\tau})\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant 2NL\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\alpha t}\int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \leqslant 2NL\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\alpha t}\frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta} \leqslant \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^{j+1}e^{-\beta t},$$
$$\begin{aligned} |y'_{j+1}(t)| &\leqslant |A||y_{j+1}(t)| + L(|y_j(kt)| + |y'_j(lt)|) \leqslant \\ &\leqslant |A|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j 2L\frac{N}{(\alpha-\beta)}e^{-\beta t} + L(\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta kt} + \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta lt}) \leqslant \\ &\leqslant \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j 2L\left(|A|\frac{N}{(\alpha-\beta)} + 1\right)e^{-\beta t} \leqslant \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^{j+1}e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

Таким чином, справедливість оцінок (10_j), $j = 1, 2, \ldots$, повністю доведена. Звідси безпосередньо випливає, що ряд $y(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} y_j(t)$ рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ до неперервно-диференційовної при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції $y(t)$, що задовольняє умови $|y(t)| \leqslant (\widetilde{M}/(1 - \widetilde{\Delta})) \cdot e^{-\beta t}$, $|y'(t)| \leqslant (\widetilde{M}/(1 - \widetilde{\Delta})) \cdot e^{-\beta t}$.

При кожному C ряд (8) є розв'язком системи (7). Це безпосередньо випливає із того, що при виконанні умов теореми ряд

$$\widetilde{f}(t,0,0)+\sum_{j=1}^{\infty}\left[\widetilde{f}\left(t,\sum_{i=0}^{j-1}y_i(kt),\sum_{i=0}^{j-1}y_i'(lt)\right)-\widetilde{f}\left(t,\sum_{i=0}^{j-2}y_i(kt),\sum_{i=0}^{j-2}y_j'(lt)\right)\right],$$

де $y_{-1}(t)\equiv 0$, рівномірно збігається при всіх $t\in\mathbb{R}^+$ і його сумою є вектор-функція $\widetilde{f}\Big(t,\sum\limits_{i=0}^{\infty}y_i(kt),\sum\limits_{i=0}^{\infty}y_i'(lt)\Big)$. Теорема доведена.

Зауваження. При деяких додаткових припущеннях теорема 1 має місце також у випадку, коли функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ залежать від невідомої функції $x(t)$.

1. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Теория уравнений нейтрального типа // Мат. анализ (Итоги науки и техники). – 1981. – **19**. – С. 55–126.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1984. – 421 с.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Доп. НАН України. – 1994. – № 3. – С. 19–21.
4. *Пелюх Г. П., Блащак Н. I.* Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргумента // Там само. – 1997. – № 8. – С. 10–13.
5. *Вельгач А. В.* Періодичні розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу і їх властивості // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 2. – С. 359–372.
6. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Про періодичні розв'язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Доп. НАН України. – 2009. – № 8. – С. 24–28.
7. *Пелюх Г. П.* О глобальных решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с отклонениями аргумента, зависящими от неизвестных функций // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 402–407.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 06.07.2010

G. P. Pelyukh, A. V. Velhach

Periodic solutions to systems of nonlinear neutral-type differential-functional equations and their properties

We establish sufficient conditions for the existence of solutions, which are continuously differentiable and T-periodic, to systems of nonlinear neutral-type differential-functional equations and study properties of the solutions.