УДК 681.14

В. Н. Ярошенко

О степенной модели прогнозирования надежности стареющих систем

(Представлено академиком НАН Украины И. Н. Коваленко)

Досліджується наближена модель розподілу безвідмовності елемента або системи на обмеженому інтервалі часу. Використовується степенева апроксимація цього розподілу. Знайдено умови, коли він є старіючим, молодіючим або U-подібним.

При проектировании технических систем большую роль играет адекватный выбор модели надежности элемента или системы, основной характеристикой которой является функция распределения $F(t)$ времени безотказного функционирования (ВБФ) элемента (системы). Выбору моделей для $F(t)$ посвящены теоретические работы [1–3], вопросам инженерных исследований — [4–6] и др.

При выборе модели $F(t)$ следует учитывать такие обстоятельства.

Фактически не реально ставить задачу прогнозировать данную функцию $F(t)$ на бесконечном интервале $0 < t < \infty$: вместо этого из физических соображений следует выбрать ограниченный интервал $x_0 < t < x_1$, на котором должна быть определена приближенная модель $F(t)$. В самом деле, время эксплуатации любой системы конечно. Таким образом, x_1 определяется как момент вывода системы из эксплуатации.

Критерием выбора x_1 может быть либо присвоение

$$F(x_1) = y_1,$$

где y_1 — заданная малая величина, либо равенство

$$\sup_{t \leqslant x_1} h(t) = y_1,$$

где $h(t) = F'(t)/(1 - F(t))$ представляет известную в теории надежности [1] функцию — опасность отказа элемента (системы). В частном случае стареющего распределения $F(t)$, т. е. когда $h(t)$ — возрастающая функция, получаем более простой критерий

$$h(x_1) = y_1.$$

Здесь y_1 — заданная малая величина. Что касается левого конца x_0 интервала (x_0, x_1), то он выбирается из физических или статистических соображений.

Так, например, если рассматривается параллельная система из n элементов, отказывающих по показательному закону с параметром λ, то очевидно, что

$$F(t) < \frac{1}{n!}(\lambda t)^n,$$

отсюда в качестве x_0 можно взять корень уравнения

$$\frac{1}{n!}(\lambda x_0)^n = y_0,$$

где y_0 — заданная малая величина.

Таким образом, при выборе модели, прежде всего, задаются четыре параметра x_0, y_0, x_1, y_1, определяющие значения $F(t)$ в двух точках, а именно:

$$F(x_0) = y_0, \tag{1}$$

$$F(x_1) = y_1. \tag{2}$$

Дальнейшая задача состоит в определении $F(t)$ в промежуточном интервале $x_0 < t < x_1$. Для этой цели будем исходить из степенной аппроксимации

$$F(t) = y_0 + (y_1 - y_0)\left(\frac{t - x_0}{x_1 - x_0}\right)^{\alpha}, \qquad x_0 \leqslant t \leqslant x_1, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ — постоянная величина. При данной аппроксимации выполняются непрерывность функции $F(t)$ на замкнутом отрезке $x_0 \leqslant t \leqslant x_1$ и начальные условия (1), (2).

Выбор показателя степени $\boldsymbol{\alpha}$. Параметр α в некоторых случаях может быть выбран из статистических соображений; если же это невозможно, то следует привлечь для такого выбора те или иные физические соображения.

Пример. Требуется построить модель $F(t)$, $x_0 \leqslant t \leqslant x_1$, для системы, состоящей из n элементов. Известно, что опасность отказа λ каждого элемента — постоянная величина и что отказ системы наступает в момент, когда число отказавших элементов достигает величины r. В таком случае, если $\lambda^r(x_1 - x_0)^r$ — малая величина, можно приближенно положить $\alpha = r$.

Для более точной аппроксимации следует использовать любой приближенный метод, например, метод наименьших квадратов.

Критерии старения, молодения, $\boldsymbol{U}$-образности.

Теорема. *Распределение $F(t)$, задаваемое на отрезке $x_0 \leqslant t \leqslant x_1$ формулой (3), является стареющим при $\alpha \geqslant 1$, U-образным при*

$$\frac{1 - y_1}{1 - y_0} < \alpha < 1, \tag{4}$$

молодеющим (термин взят из [3]) при

$$0 < \alpha \leqslant \frac{1 - y_1}{1 - y_0}. \tag{5}$$

Доказательство. Из формулы (3) вытекает, что при $x_0 < t < x_1$ плотность вероятности

$$F'(t) = \alpha\frac{(t - x_0)^{\alpha-1}(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^{\alpha}} \tag{6}$$

и

$$1 - F(t) = 1 - y_0 - \left(\frac{t - x_0}{x_1 - x_0}\right)^{\alpha}(y_1 - y_0). \tag{7}$$

Из выражений (6) и (7) после некоторых преобразований для опасности отказа имеем

$$h(t)=\frac{F'(t)}{1-F(t)}=\frac{\alpha(t-x_0)^{\alpha-1}}{\dfrac{1-y_0}{y_1-y_0}(x_1-x_0)^{\alpha}-(t-x_0)^{\alpha}}. \qquad (8)$$

Нетрудно видеть, что с учетом (8) при $\alpha=1$ следует, что $1/h(t)$ задается линейной функцией.

При $\alpha>1$ числитель правой части формулы (8) возрастает, а знаменатель убывает, так как $(1-y_0)/(y_1-y_0)>1$, и, следовательно, $h(t)$ — возрастающая функция от t, т. е. распределение $F(t)$ — стареющее.

Для рассмотрения случая $0<\alpha\leqslant 1$ представим (8) в виде

$$\frac{1}{h(t)}=\frac{1-y_0}{\alpha(y_1-y_0)}(x_1-x_0)^{\alpha}(t-x_0)^{1-\alpha}-\frac{1}{\alpha}(t-x_0), \qquad (9)$$

откуда получаем

$$\left(\frac{1}{h(t)}\right)'=\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1-y_0}{y_1-y_0}\left(\frac{x_1-x_0}{t-x_0}\right)^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}. \qquad (10)$$

Правая часть (10) равна (-1) при $\alpha=1$, следовательно, $1/h(t)$ есть линейная (убывающая) функция. При $0<\alpha<1$ из (9) получаем $h(t)\to\infty$ при $t\to x_0$. Из равенства (10) находим, что функция $[1/h(t)]'$ монотонно убывает.

Это значит, что либо существует корень уравнения $[1/h(t)]'=0$ в интервале $x_0<t<$ $<x_1$, и тогда $F(t)$ является U-образной в этом интервале, либо такого корня не существует, и тогда $F(t)$ — молодеющее распределение (в этом интервале). Из (10) очевидно, что второй из упомянутых случаев имеет место, когда $[1/h(t)]'\geqslant 0$ при $t=x_1$.

Из (10) находим, что это неравенство выполняется, если справедливо условие (5).

Итак, теорема доказана.

Замечание. Формулой (3) функция $F(t)$ определяется пятью параметрами: x_0, y_0, x_1, y_1, α. При помощи линейного преобразования аргумента можно $F(t)$ привести к функции, зависящей только от трех параметров. Для этого введем функцию

$$F_0(t,y_0,y_1,\alpha)=y_0+t^{\alpha}(y_1-y_0), \qquad 0<t<1. \qquad (11)$$

Легко видеть, что выражение (3) для $F(t)$ совпадет с выражением (11) для $F_0(t)$, если в последнем заменить аргумент t на $(t-x_0)/(x_1-x_0)$. Тогда для $F(t)$, определенной параметрами x_0, y_0, x_1, y_1, α, при $x_0<x_1$, $y_0<y_1$, $\alpha>0$, с учетом (11) получаем формулу приведения

$$F(t)=F_0\left(\frac{t-x_0}{x_1-x_0},y_0,y_1,\alpha\right). \qquad (12)$$

1. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. – Москва: Наука, 1965. – 524 с.
2. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытание на безотказность: Пер. с англ. – Москва: Наука, 1985. – 327 с.
3. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. – Москва: Радио и связь, 1988. – 392 с.

4. *Теслер Г. С.* Системная методология прогнозирования процессов естественной и искусственной природы // Математ. машины и системы. – 2004. – № 1. – С. 144–165.
5. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытаний на безотказность. – Москва: Наука, 1984. – 524 с.
6. *Стельников В. П., Федухин А. В., Яковлев М. А.* Прогнозирование надежности слаботочного плоского разъемного соединения // Математ. машины и системы. – 1993. – № 3. – С. 69–79.

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.06.2010

V. N. Yaroshenko

On a degree model of forecast of the reliability of ageing systems

An approximation model of the faultlessness distribution of an element or a system on the bounded time interval is investigated. The degree approximation of this distribution is used. The conditions when it is degradable, rejuvenescent, or U-type have been found.