



УДК 530.182;538.945.6

© 2011

Я. О. Золотарюк

Направлена динаміка флюксонів у джозефсонівських контактах під впливом періодичних збурень

(Представлено академіком НАН України В. М. Локтевим)

Досліджено явище направленої руху флюксону в довгому джозефсонівському контакті під впливом зовнішнього змінного струму в області параметрів, де не працює теорія збурень. Побудовано залежності середньої швидкості флюксону від амплітуди та частоти зовнішнього струму. Встановлено, що причинами відхилення цих залежностей від передбачених теорією збурень є взаємодія флюксону з внутрішніми модами та малоамплітудними звилями.

Топологічні солітони в довгих контактах Джозефсона або в масивах точкових контактів Джозефсона (відомі як флюксони або джозефсонівські вихори) активно досліджуються протягом декількох останніх десятиліть [1, 2]. Флюксони є носіями квантів потоку магнітного поля і, як і решта нелінійних збуджень топологічного типу, відзначаються високим ступенем структурної стійкості, оскільки такий солітон можна знищити якщо його перемістити за межі зразка. Однією з причин особливої уваги до цих збуджень є можливість використання їх у ролі елементів пам'яті в квантових комп'ютерах [3]. Надзвичайно важливим є детальне дослідження відгуку топологічних солітонів на зовнішні збурення, зокрема на періодичні.

Явище направленої руху флюксонів у довгому джозефсонівському контакті під впливом асиметричних часових або просторових збурень детально досліджувалося як теоретично [4], так і експериментально [5–7]. Було встановлено, що направлений рух солітону можна отримати, якщо порушити всі симетрії, які пов'язують солітонні розв'язки з протилежними за знаком та однаковими за модулем швидкостями. Основним інструментом дослідження динаміки флюксонів є солітонна теорія збурень [8]. Проте область її застосування обмежена адиабатичними збуреннями та малими амплітудами зовнішнього струму. На сьогодні необхідно отримати повну інформацію про направлений рух флюксону для широкої області параметрів, для яких пертурбативні методи не працюють. Метою даного дослідження є побудова залежності середньої швидкості флюксону від амплітуди зовнішнього змінного струму та від його частоти поза областю застосовності теорії збурень.

Модель та рівняння руху. Рівняння синус-Гордон (СГ) описує динаміку флюксону в довгих контактах Джозефсона [1]. У безрозмірних змінних (де простір нормується до джозефсонівської глибини проникнення, а час — до оберненої плазмової частоти) за умови наявності дисипації та зовнішнього змінного струму це рівняння має такий вигляд:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi + \alpha \phi_t + j(t) = 0. \quad (1)$$

У цьому рівнянні змінна $\phi(x, t)$ описує різницю фаз макроскопічних хвильових функцій надпровідників, що утворюють контакт, α відповідає за дисипацію, а функція $j(t) = j(t+T)$ з нульовим середнім значенням $\langle j(t) \rangle_t = 0$ описує густину зовнішнього змінного струму, що подається на контакт і є однорідно розподіленим вздовж нього.

У даній роботі розглядається контакт з граничними умовами типу другого роду $\phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0$ та кільцевий контакт з періодичними граничними умовами $\phi(L, t) = \phi(x, t) + 2\pi$, де $L = 2\pi R$, а радіус контакту R є досить великим, аби контакт можна було вважати довгим та квазіодновимірним.

Як вже було зазначено вище, необхідною умовою направлено руху є порушення всіх наявних симетрій, що пов'язують солітонні розв'язки з протилежними швидкостями. Досягти цього можна відповідним вибором функціональної залежності густини струму $j(t)$. У випадку $\alpha \neq 0$ необхідною вимогою направлено руху є виконання співвідношення

$$j\left(t + \frac{T}{2}\right) \neq -j(t). \quad (2)$$

Природним вибором є функція $j(t)$ у вигляді суперпозиції двох гармонік, розглянута, зокрема, в роботах [4, 7], що має нульове середнє і в той же час порушує необхідні симетрії:

$$j(t) = j_1 \cos \omega t + j_2 \cos (m\omega t + \theta), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Така функція задовольняє співвідношення (2) для будь-якого θ , якщо одночасно $j_2 \neq 0$ та m є парним. Якщо ж m непарне, то умова (2) завжди порушується, тобто $j(t + T/2) = -j(t)$.

Середня швидкість флюксона є важливою фізичною величиною, оскільки вона пропорційна середньому падінню напруги на контакт, зокрема, для кільцевого контакту довжини L середнє падіння напруги виражається через середню швидкість так: $\bar{V} = 2\pi \langle v \rangle / L$. У першому наближенні солітонної теорії збурень [8] припускається, що збурення є досить слабким і не змінює форми солітону. Натомість, збурення лише впливає на еволюцію центра мас солітону та його швидкості. Для випадку $m = 2$ і при умові $j_l / \sqrt{\alpha^2 + (l\omega)^2} \ll 1$, $l = 1, 2$, було одержано (див. також [4]) таке значення:

$$\langle v \rangle \simeq \frac{3\pi^3}{512} \frac{j_1^2 j_2}{(\alpha^2 + \omega^2) \sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}} \sin(\theta - \theta_0), \quad \text{tg } \theta_0 = \frac{\alpha(\alpha^2 + 3\omega^2)}{2\omega^3}. \quad (4)$$

Таким чином, залежність $\langle v \rangle$ від різниці фаз θ має синусоїдальну форму. Подібні розрахунки для $m = 3$ дають $\langle v \rangle = 0$ незалежно від значення θ .

Оскільки випадки великих амплітуд та високих частот зовнішнього струму недосяжні методом солітонної теорії збурень, для дослідження рівняння СГ нам доведеться вдатися до методів чисельного моделювання. Рівняння (1) було розв'язано шляхом дискретизації змінної $\phi(x, t)$ (крок дискретизації варіювався в межах 0,04–0,1), а результуюча система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь розв'язувалася за допомогою методу Рунге–Кутти

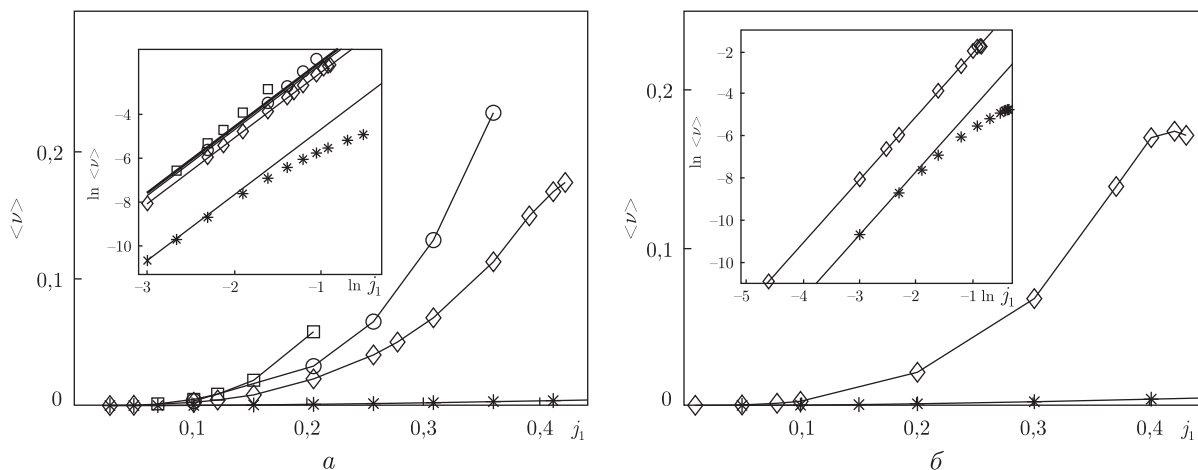


Рис. 1. Залежність середньої швидкості флюксону від амплітуди першої гармоніки j_1 при фіксованій частці $j_2/j_1 = 0,65$ та при $\theta = 1,61$: \diamond — $\omega = 0,35$, $\alpha = 0,15$; \circ — $\alpha = 0,1$; \square — $\alpha = 0,05$; $*$ — $\omega = 0,05$, $\alpha = 0,3$; *a* — контакт, близький до нескінченного (подробіці див. в тексті), *б* — кільцевий контакт з довжиною $L = 30$. На вставках зображено ті самі залежності з використанням логарифмічного масштабу. Прямі лінії відповідають екстраполяції функціями типу $3 \ln j_1 + C$, де C — довільна стала

четвертого порядку. Надалі розглядатиметься лише випадок змішування першої та другої ($m = 2$) гармонік в (3).

Слід відзначити, що в результаті чисельних розрахунків встановлено, що існує лише один аттрактор рівняння (1), який відповідає направленому руху флюксону, причому цей рух є синхронізованим із зовнішнім збуренням і флюксон повністю відтворює свою форму після періоду коливань струму $j(t)$: $\phi(x - \langle v \rangle T, t + T) = \phi(x, t)$.

Залежність середньої швидкості флюксону від амплітуди зовнішнього струму. Вираз (4), одержаний за допомогою теорії збурень, свідчить про кубічну залежність середньої швидкості солітону від амплітуди струму (тому що $\langle v \rangle \sim j_1^2 j_2$, але якщо $j_1/j_2 = \text{const}$, то можна вважати, що $\langle v \rangle \sim j_1^3$). Для перевірки цього результату було побудовано залежність $\langle v \rangle(j_1)$ при фіксованій частці $j_2/j_1 = 0,65$ для різних значень α й ω (див. рис. 1).

Слід відзначити, що для різних значень частоти ω та параметра дисипації α спостерігається хороша відповідність з кубічним законом зростання швидкості в області малих амплітуд $j_1 \lesssim 0,1$. При подальшому збільшенні j_1 відбувається сповільнення або прискорення зростання залежності, а потім і повний її обрив. Рис. 1, *a* стосується контакту, який можна вважати нескінченним і для якого використовувалися граничні умови другого роду. Оскільки моделювання нескінченного контакту здійснити неможливо, то бралася довжина $L > 500$, при якій жодні граничні ефекти не проявлялися. Пояснення відхилення залежності $\langle v \rangle(j_1)$ від кубічної слід шукати у впливі збурення на форму флюксону. При збільшенні амплітуди відбувається деформація його форми шляхом утворення локалізованої моди, яка коливається синхронно із зовнішнім струмом $j(t)$. Ця мода майже непомітна при малих $j_{1,2}$, але стає дедалі більшою при зростанні $j_{1,2}$, що нескладно визначити, порівнявши розподіли джозефсонівської фази $\phi(x, t)$ на рис. 2. При деякому значенні амплітуди зовнішнього струму коливання цієї моди стають настільки великими, що флюксон руйнується і залежність $\langle v \rangle(j_1)$ обривається. Максимальне критичне значення j_1 , при якому флюксон все ще існує, сильно залежить від значення параметра дисипації, причому це значення зменшується із зменшенням α . Це пояснюється збільшенням коливань внутрішньої моди при зменшенні

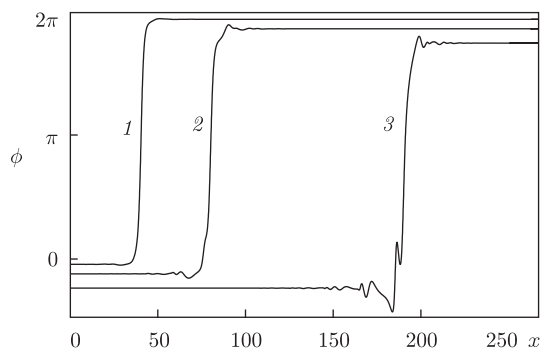


Рис. 2. Розподіл джозефсонівської фази $\phi(x, t)$ для значень амплітуди першої гармоніки $j_1 = 0,12$ (крива 1), $j_1 = 0,27$ (крива 2), $j_1 = 0,1$ (крива 3). Решта параметрів відповідають рис. 1, а з $\alpha = 0,15$ та $\omega = 0,35$

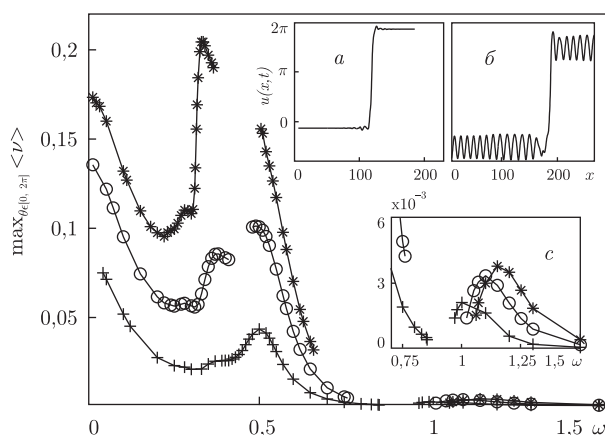


Рис. 3. Залежність максимуму середньої швидкості солітону $\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \langle v \rangle$ від частоти ω при $\alpha = 0,15$, $j_2/j_1 = 0,65$, $j_1 = 0,2$ (+), $j_1 = 0,3$ (o) та $j_1 = 0,4$ (*). Вставки а та б зображують відповідно профілі флюксонів при $j_1 = 0,3$, $\theta = 2,2$ для $\omega = 0,41$ та $\omega = 0,45$, с — подробиці в околі $\omega = 1$

дисипації, отже її коливання раніше досягнуть амплітуди, достатньої для руйнування солітону. Для скінченних контактів флюксон взаємодіє з малоамплітудними хвилями (джозефсонівськими плазмонами), які він сам збуджує під час руху вздовж контакту. Проте якісних відмінностей з випадком нескінченного контакту в границі $j_{1,2} \rightarrow 0$ не спостерігається (див. для порівняння рис. 1, а та рис. 1, б), кубічний закон зростання також має місце.

Таким чином, спостерігається відхилення від передбаченого першим порядком теорії збурень (4) кубічного закону зростання середньої швидкості флюксону і пояснюється воно деформацією форми флюксону під впливом збурення, оскільки вищезгадане наближення припускає незмінність форми солітону.

Залежність середньої швидкості флюксону від частоти зовнішнього струму. Іншим важливим питанням є залежність середньої швидкості флюксону від частоти ω . Оскільки залежність $\langle v \rangle$ від зсуву фаз має форму, дуже близьку до синусоїдальної, то на рис. 3 зображено тільки залежність максимального на інтервалі $\theta \in [0, 2\pi]$ значення $\langle v \rangle$ від частоти. З рисунку видно, що найвищої швидкості направлений рух досягає в адиабатичному режимі, тобто при $\omega \rightarrow 0$. При зростанні ω середня швидкість спадає, хоча і немонотонним чином, а на частотах $\omega \sim 1$ вона зменшується на два порядки порівняно

із адиабатичним значенням. Слід звернути увагу на те, що теорія збурень (4) передбачає *монотонне* спадання $\langle v \rangle \sim (\omega^2 + \alpha^2)^{-1} (4\omega^2 + \alpha^2)^{-1/2}$.

Таким чином, флюксон не встигає реагувати на швидкі осциляції $j(t)$ і майже їх не відчуває. Цікаві ефекти відбуваються в околі плазмової частоти ($\omega \simeq 1$) та її половини ($\omega \simeq 0,5$). При досить малих амплітудах $j_{1,2} < j_c$, де j_c — деяке критичне значення, спостерігаються максимуми залежності $\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \langle v \rangle(\omega)$ саме в околі зазначених частот. При цьому форма флюксону при різних значеннях ω якісно не відрізняється (див. рис. 3, *a*). При перевищенні критичного значення j_c утворюється зв'язаний стан солітону і плазмону з осцилюючою асимптотикою при $|x| \rightarrow \infty$ (див. рис. 3, *b*), спочатку в околі плазмової частоти $\omega = 1$, а при більшому значенні $j_{1,2}$ — в околі $\omega = 0,5$. Оскільки середню швидкість такого зв'язаного стану однозначно визначити неможливо через те, що вона залежить від довжини контакту (а в нашому формулюванні задачі він вважається безмежним), то в тих областях залежності $\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \langle v \rangle(\omega)$, де утворюються зв'язані стани, залишено “вікна” без певного значення швидкості солітону. Ширина цих вікон зростає із збільшенням амплітуд $j_{1,2}$. Отже, можна говорити про резонансне (оскільки відбувається на половинній та основній плазмовій частоті) зв'язування флюксону з плазмоном. Це явище є *нелінійним* за амплітудою зовнішнього струму, оскільки відбувається при досягненні певних критичних значень $j_{1,2}$.

Підсумовуючи одержані результати, слід відзначити, що динаміка флюксону під впливом бігармонічного збурення в режимі поза адиабатичним наближенням і при великих амплітудах істотно відрізняється від поведінки, передбаченої теорією збурень. Особливо треба зауважити, що:

1) кубічна залежність середньої швидкості флюксону від амплітуди зовнішнього струму зберігається лише для малих амплітуд. Це явище пояснюється деформуванням флюксону і утворенням на ньому внутрішньої коливної моди. При цьому вже незастосовним є перший порядок теорії збурень, що базується на незмінності форми солітону і тому потрібно враховувати вищі порядки;

2) немонотонне спадання залежності середньої швидкості флюксону від частоти зовнішнього змінного струму пояснюється резонансною взаємодією флюксону з малоамплітудними збудженнями (плазмонами).

1. Barone A., Paterno G. Physics and applications of the Josephson effect. – New York: Wiley, 1982. – 551 p.
2. Ustinov A. V. Solitons in Josephson junctions // Physica D. – 1998. – **123**. – P. 315–329.
3. Fedorov A., Shnirman A., Schön G. et al. Reading out the state of a flux qubit by Josephson transmission line solitons // Phys. Rev. B. – **75**. – P. 224504(13).
4. Salerno M., Zolotarev Y. Soliton ratchetlike dynamics by ac forces with harmonic mixing // Phys. Rev. E. – 2002. – **65**. – P. 056603(10).
5. Carapella G. Relativistic flux quantum in a field-induced deterministic ratchet // Phys. Rev. B. – 2001. – **63**. – P. 054515(6).
6. Carapella G., Costabile G. Ratchet effect: Demonstration of a relativistic fluxon diode // Phys. Rev. Lett. – 2001. – **87**. – P. 077002(4).
7. Ustinov A. V., Coqui C., Kemp A. et al. Ratchetlike dynamics of fluxons in annular Josephson junctions driven by biharmonic microwave fields // Ibid. – 2004. – **93**. – P. 087001(4).
8. McLaughlin D. W., Scott A. C. Perturbation analysis of fluxon dynamics // Phys. Rev. A. – 1978. – **18**. – P. 1652–1680.

Y. O. Zolotaryuk

Directed fluxon dynamics in Josephson junctions under the influence of periodic perturbations

The phenomenon of directed fluxon motion in an ac-biased long Josephson junction is investigated for the range of parameters where perturbation theory is not applicable. The dependence of the average fluxon velocity on the bias amplitude and frequency is obtained. The reason for a deviation of this dependence from the perturbation theory results is shown to be the fluxon interaction with the internal modes and small-amplitude waves.