УДК 514.774.4

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Борисенко, Е. А. Олин**

Кривизны гиперсфер геометрии Гильберта

Доведено, що нормальні кривини гіперсфер, кривини Рунда і Фінслера кола геометрії Гільберта прямують до 1, коли радіус прямує до нескінченності.

Связное гладкое многообразие M^n называется *финслеровым* [1], если задана гладкая положительно однородная по координатам в касательных пространствах функция $F\colon TM^n \to [0,\infty)$ такая, что билинейная симметричная форма $\mathbf{g}_y(u,v) = g_{ij}(x,y)u^i v^j\colon T_xM^n \times T_xM^n \to \mathbb{R}$ положительно определена для любой пары $(x,y) \in TM^n$, где $g_{ij}(x,y) = (1/2)\cdot[F^2(x,y)]_{y^i y^j}$.

Геометрии Гильберта являются обобщением модели Кели–Клейна пространства Лобачевского. В ней эллипсоид, играющий роль абсолюта, заменяется произвольной выпуклой гиперповерхностью. Геометрии Гильберта являются также финслеровыми пространствами постоянной отрицательной флаговой кривизны [1].

Пусть U — это ограниченное открытое выпуклое множество с границей класса C^∞ с положительными нормальными кривизнами в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|$. Для точки $x \in U$ и касательного вектора $y \in T_xU = \mathbb{R}^n$ пусть x_- и x_+ — это точки пересечения соответственно лучей $x + \mathbb{R}_- y$ и $x + \mathbb{R}_+ y$ с *абсолютом* ∂U. Тогда метрика Гильберта определяется таким образом:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(\Theta(x,y) + \Theta(x,-y)), \tag{1}$$

где $\Theta(x,y) = \|y\|\cdot(1/\|x - x_-\|)$ называется метрикой Функа на U.

Метрика Гильберта инвариантна относительно проективных преобразований, оставляющих U ограниченным множеством, а геодезическими являются афинные отрезки.

В работе [2] доказано, что единичная сфера касательного пространства метрики Гильберта стремится в C^0 топологии к эллипсоиду, когда точка стремится к абсолюту, т. е. метрика Гильберта “стремится” к римановой метрике пространства Лобачевского.

В отличие от римановой геометрии, в финслеровом пространстве кривизну кривой можно определить несколькими способами.

Нормальная кривизна гиперповерхности в финслеровом пространстве определяется следующим образом [1]. Пусть $\varphi\colon N \to M^n$ — гиперповерхность в финслеровом многообразии M^n. Вектор $\mathbf{n} \in T_{\varphi(x)}M^n$ называется вектором нормали к N в точке $x \in N$, если $\mathbf{g_n}(y,\mathbf{n}) = 0$ для всех $y \in T_xN$. Тогда *нормальная кривизна* $\mathbf{k_n}$ в точке $x \in N$ в направлении $y \in T_xN$ определяется как

$$\mathbf{k_n} = \mathbf{g_n}(\nabla_{\dot c(s)}\dot c(s)|_{s=0}, \mathbf{n}), \tag{2}$$

где $\dot c(0) = y$, и $c(s)$ является геодезической в индуцированной связности в N, $\mathbf{n}$ — выбранная единичная нормаль.

Для кривой $c(s)$, параметризированной натуральным параметром в финслеровом многообразии M^n, возможно определить еще две кривизны.

Кривизна Финслера кривой [3, 4] определяется таким образом:

$$\mathbf{k}_F(c(s)) = \sqrt{\mathbf{g}_{\dot{c}(s)}(\nabla_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s), \nabla_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s))}. \tag{3}$$

Кривизна Рунда кривой $c(s)$ [3] равна

$$\mathbf{k}_R(c(s)) = \sqrt{\mathbf{g}_{\nabla_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s)}(\nabla_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s), \nabla_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s))}. \tag{4}$$

Известно, что нормальные кривизны гиперсфер в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$ равны $\coth(r)$ и стремятся к 1, при стремлении к бесконечности радиуса r. Мы доказываем такое же свойство геометрий Гильберта.

Теорема 1. *Рассмотрим 2-мерную геометрию Гильберта, построенную на множестве $U \in \mathbb{R}^2$, ограниченном открытом выпуклом множестве с границей класса C^∞ с положительной кривизной. Рассмотрим точку o внутри множества U. Обозначим через $\rho_r(u)$ радиальную функцию гиперсферы геометрии Гильберта радиуса r. Пусть $\mathbf{k}_R(\varphi, r)$ — кривизна Рунда, $\mathbf{k}_F(\varphi, r)$ — кривизна Финслера окружности радиуса r с центром в точке o, вычисленные в точке окружности $\rho_r(u)u$, соответствующей направлению $u=(\cos\varphi, \sin\varphi)$ из o. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{k}_R(\varphi, r) = \lim_{r\to\infty} \mathbf{k}_F(\varphi, r) = 1$$

равномерно по φ.

Теорема 2. *Рассмотрим n-мерную геометрию Гильберта, построенную на множестве $U \in \mathbb{R}^n$, ограниченном открытом выпуклом множестве с границей класса C^∞ с положительными нормальными кривизнами. Рассмотрим точку o внутри множества U. Обозначим через $\rho_r(u)$ радиальную функцию гиперсферы геометрии Гильберта радиуса r. Зафиксируем ненулевой вектор y. Пусть $\mathbf{k}_\mathbf{n}(u, r, y)$ — нормальная кривизна в направлении касательного вектора $w \in \operatorname{span}\{u, y\}$ гиперсферы радиуса r с центром в точке o, вычисленная в точке гиперсферы $\rho_r(u)u$, соответствующей единичному направлению u из o. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{k}_\mathbf{n}(u, r, y) = 1$$

равномерно по u и y.

Рассмотрим вначале двумерную геометрию Гильберта.

Рассмотрим точку o внутри области U. Пусть $\omega(\varphi)$ — полярное задание абсолюта из точки o. Зафиксируем единичный вектор u, в котором будем вычислять кривизну окружностей. Перепараметризуем $\omega(\varphi)$ так, чтобы $\varphi = 0$ соответствовал направлению u.

Можно выполнить такое проективное преобразование, чтобы направление u стало перпендикулярно касательной к абсолюту в точке $\omega(0)$, касательная в точке $\omega(\pi)$ параллельна касательной в точке $\omega(0)$, и ∂U можно представить в виде графика функции $x_2 = f(x_1)$ такой, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1/2$ в окрестности точки $\omega(0)$.

С помощью оценки на угол между радиальным и нормальным направлением выпуклой гиперповерхности, полученной А. А. Борисенко в работе [5], доказано, что при таком проективном преобразовании кривизна ∂U и все производные f остаются равномерно ограниченными.

В работе [6] получено, что полярное задание гиперсферы радиуса r имеет вид

$$\rho_r(u) = \frac{\omega(-u)\omega(u)(e^{2r} - 1)}{\omega(u) + \omega(-u)e^{2r}} \tag{5}$$

и, при $r \to \infty$

$$\omega(u) - \rho_r(u) = \omega(u)\left(\frac{\omega(u)}{\omega(-u)} + 1\right)e^{-2r} + o(e^{-2r}). \tag{6}$$

Из формулы (5) получаем, что окружность радиуса r имеет параметризацию

$$c(\varphi) = \left(\frac{\omega(\pi-\varphi)\omega(\varphi)(e^{2r}-1)}{\omega(\varphi)+\omega(\pi-\varphi)e^{2r}}\sin\varphi, \frac{\omega(\pi-\varphi)\omega(\varphi)(e^{2r}-1)}{\omega(\varphi)+\omega(\pi-\varphi)e^{2r}}\cos\varphi\right),$$

где $\omega(\varphi)$ — полярное задание абсолюта.

С учетом предположений относительно U верно $\omega'(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\omega''(0) = 1/2$, $\omega'(\pi) = 0$. Обозначим $C = (1 + \omega(\pi))/\omega(\pi)$. Тогда

$$c'(0) = \frac{\omega(\pi)(e^{2r}-1)}{1+\omega(\pi)e^{2r}}(1,0) = (1 - Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 0), \qquad r \to \infty. \tag{7}$$

И вторая производная

$$\begin{aligned} c''(0) &= \frac{(e^{2r}\omega(\pi)^2(\omega''(0)-1) - \omega(\pi) + \omega''(\pi))(e^{2r}-1)}{(1+e^{2r}\omega(\pi))^2}(0,1), \\ c''(0) &= \left(0, -\frac{1}{2} + O(e^{-2r})\right), \qquad r \to \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее из (6) следует, что в точке данной окружности

$$x_2 = \omega(0) - \frac{\omega(\pi)\omega(0)(e^{2r}-1)}{\omega(0)+\omega(\pi)e^{2r}} = Ce^{-2r} + O(e^{-3r}). \tag{9}$$

Ковариантная производная Черна–Рунда вдоль пути $c(t)$ в финслеровом пространстве с метрикой Гильберта F вычисляется по формуле [1]

$$\nabla_{c'(t)}c'(t) = \{c''(t)^i + (\Theta(c(t), c'(t)) - \Theta(c(t), c'(t))c'(t)^i\}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{10}$$

Если перейти к натуральной параметризации, то верна следующая формула:

$$\nabla_{\dot c(s)}\dot c(s) = \frac{c''(t) + c'(t)\left(\Theta(c(t), c'(t)) - \Theta(c(t), -c'(t)) - \dfrac{\mathbf{g}_{c'(t)}(\nabla_{c'(t)}c'(t), c'(t))}{\mathrm{F}(c(t), c'(t))^2}\right)}{\mathrm{F}(c(t), c'(t))^2}. \tag{11}$$

Теперь нужно получить асимптотические разложения для метрических коэффициентов $g_{ij}(x, y)$ геометрии Гильберта, когда точка x близка к абсолюту.

В выражение для метрических коэффициентов $g_{ij}(x, y)$ входят производные метрической функции F по координатам в касательном пространстве. Используя лемму Окада, можно записать выражение для метрических коэффициентов метрики Гильберта через производные метрики Функа по координатам на U:

$$\begin{aligned} g_{ij}(x,y) &= \frac{1}{2}\mathrm{F}(x,y)\frac{\Theta_{x^ix^j}(x,y)\Theta(x,y) - 2\Theta_{x_i}(x,y)\Theta_{x_j}(x,y)}{\Theta(x,y)^3} + \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{F}(x,y)\frac{\Theta_{x^ix^j}(x,-y)\Theta(x,-y) - 2\Theta_{x_i}(x,-y)\Theta_{x_j}(x,-y)}{\Theta(x,-y)^3} + \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{\Theta_{x^i}(x,y)}{\Theta(x,y)} - \frac{\Theta_{x^i}(x,-y)}{\Theta(x,-y)}\right)\left(\frac{\Theta_{x^j}(x,y)}{\Theta(x,y)} - \frac{\Theta_{x^j}(x,-y)}{\Theta(x,-y)}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Для удобства мы будем использовать нижние индексы для координат x_i. Пусть теперь $\mathrm{F}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — это некоторая двумерная метрика Гильберта. Получены такие оценки:

$$\mathrm{F}(0, x_2, 1, 0) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + \frac{2f'''(0)^2}{9}\sqrt{x_2} + O(x_2^{3/2}), \tag{13}$$

$$\mathrm{F}\left(0, x_2, l, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4x_2} + \frac{1}{2L} + O(x_2). \tag{14}$$

Здесь $L > 0$ — длина хорды U в направлении $(l, -1/2)$.

$$\Theta(0, x_2, 1, 0) - \Theta(0, x_2, -1, 0) = \frac{2}{3}f'''(0) + O(x_2), \tag{15}$$

$$\begin{gathered} g_{11}(0, x_2, 1, 0) = \frac{1}{4x_2} + O(1), \qquad g_{12}(0, x_2, 1, 0) = \frac{f'''(0)}{6x_2} + O(1), \\ g_{22}(0, x_2, 1, 0) = \frac{1}{4x_2^2} + \frac{2f'''(0)^2 + 9f^{(4)}(0)}{18x_2} + O(1), \end{gathered} \tag{16}$$

$$g_{12}(0, x_2, 0, 1) = 0, \qquad g_{22}(0, x_2, 0, 1) = \frac{1}{4x_2^2} + O\left(\frac{1}{x_2}\right). \tag{17}$$

Оценим вектор $\nabla_{\dot{c}(0)}\dot{c}(0)$ по формуле (11). Из формул (9), (10), (13), (15), (16) следует

$$\nabla_{\dot{c}(0)}\dot{c}(0) = \frac{\left(f'''(0), -\dfrac{1}{2}\right) + (1,1)O(e^{-2r})}{\mathrm{F}(c(0), c'(0))^2}. \tag{18}$$

С учетом значения (13)

$$\nabla_{\dot{c}(0)}\dot{c}(0) = (4f'''(0), -2)e^{-2r} + (1,1)O(e^{-3r}).$$

Используя формулы (9), (18), вычислим кривизну Рунда (4):

$$\mathbf{k}_R(r)^2 = \mathrm{F}(c(0), \nabla_{\dot{c}(0)}\dot{c}(0)) = \frac{\mathrm{F}\left(0, Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), -f'''(0) + O(e^{-2r}), \dfrac{1}{2} + O(e^{-2r})\right)}{\mathrm{F}(0, Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 1 - Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 0)^2}.$$

Подставив значения из (13), (14), получим

$$\mathbf{k}_R(r)^2 = 1 + C\left(\frac{2}{L} - \frac{8f'''(0)^2}{9}\right)e^{-2r} + O(e^{-3r}). \tag{19}$$

Здесь $L > 0$ — длина хорды U в направлении $(f'''(0), -1/2)$.

Теперь кривизна Финслера (3). Применив формулы (9), (18), получим

$$\mathbf{k}_F(r)^2 = \mathbf{g}_{\dot{c}(0)}(\nabla_{\dot{c}(0)}\dot{c}(0), \nabla_{\dot{c}(0)}\dot{c}(0)) = \frac{f'''(0)^2 g_{11} - f'''(0)g_{12} + \dfrac{1}{4}g_{22}}{\mathrm{F}(0, Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 1 - Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 0)^4},$$

где коэффициенты g_{ij} вычисляются в точке $(0, Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 1 + O(e^{-2r}), 0)$. Окончательно, из (13), (16) вытекает, что

$$\mathbf{k}_F(r)^2 = 1 + C\left(-\frac{8}{9}f'''(0)^2 + 4f^{(4)}(0)\right)e^{-2r} + O(e^{-3r}). \tag{20}$$

Заметим, что нормальная кривизна гиперповерхности не зависит от кривой на гиперповерхности [1]. Таким образом, мы можем взять нормальное сечение гиперсферы геометрии Гильберта, и нормальная кривизна этого сечения совпадает с нормальной кривизной гиперсферы в направлении сечения. Так как нормальное направление гиперсферы совпадает с радиальным, то в нормальном сечении гиперсферы получается двумерная окружность. Вычислим нормальную кривизну окружности радиуса r геометрии Гильберта. Из (11) следует, что

$$\mathbf{k}_\mathbf{n}(r) = \mathbf{g}_\mathbf{n}(\nabla_{\dot{c}(0)}\dot{c}(0), \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{g}_\mathbf{n}(c''(0), \mathbf{n})}{\mathrm{F}(c(0), c'(0))^2}. \tag{21}$$

Заметим, что в силу того, что $g_{12}(0, x_2, 0, 1) = 0$ (формулы (17)), единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ окружности в точке $(0, x_2)$ имеет координаты $\dfrac{1}{\mathrm{F}(0, x_2, 0, 1)}(0, -1)$.

Итого, подставляя (13), (9), (8), (17) в формулу для нормальной кривизны, имеем

$$\mathbf{k}_\mathbf{n}(r) = \frac{\frac{1}{2}g_{22}(0, Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 0, 1)}{\mathrm{F}(0, Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 1 - Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 0)^2 \mathrm{F}(0, Ce^{-2r} + O(e^{-3r}), 0, 1)} =$$

$$= 1 + C\left(\frac{1}{H} - \frac{8f'''(0)^2}{9}\right)e^{-2r} + O(e^{-3r}). \tag{22}$$

Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны полностью. Тем самым получено, что геометрия Гильберта "стремится" к римановой метрике пространства Лобачевского уже в C^2-топологии.

1. *Shen Z.* Lectures on Finsler geometry. – Singapore: World Scientific, 2001. – 306 p.
2. *Colbois B., Verovic P.* Rigidity of Hilbert metrics // Bull. Austral. Math. Soc. – 2002. – No 65. – P. 23–34.
3. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств: Пер. с англ. – Москва: Наука, 1981. – 504 с.
4. *Finsler P.* Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. – Basel: Birkhäuser, 1951. – 251 p.
5. *Borisenko A. A., Gallego E., Reventos A.* Relation between area and volume for convex sets in Hadamard manifolds // Different. Geom. and Its Appl. – 2001. – **14**. – P. 267–280.
6. *Borisenko A. A., Olin E. A.* Asymptotic properties of Hilbert geometry // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2008. – **4**, No 3. – С. 327–345.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 17.06.2011

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Borisenko, E. A. Olin**

Curvatures of hyperspheres in the Hilbert geometry

We prove that the normal curvatures of hyperspheres, Rund curvature, and Finsler curvature of a circle in the Hilbert geometry tend to 1, as radii tend to infinity.