



УДК 532.526

© 2011

Член-корреспондент НАН України **А. А. Авраменко**

Апробация ренормгрупповой модели нестационарной турбулентности

На основі RNG $k-\varepsilon$ моделі турбулентності для нестационарних потоків проаналізовані два типи течій. Перша задача — це осцилююча течія у плоскому каналі, друга — розгінна течія у плоскому каналі. Отримані результати дозволяють визначити область значень параметрів, у якій необхідно брати до уваги ренормалізаційну нестационарну поправку турбулентних течій.

В работе [1] показано, что для нестационарных турбулентных процессов процедура групповой ренормализации уравнений Навье–Стокса, Фурье–Кирхгофа и уравнений $k-\varepsilon$ модели турбулентности приводит к появлению дополнительного слагаемого, которое учитывает нестационарность турбулентных потоков. Указанные уравнения имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[B_d \left(\frac{\nu_t^3 \varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2} D_0} \right)^{2/\varepsilon^*} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right] + \frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\left(\frac{\nu_t^3 \varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2} D_0} \right)^{2/\varepsilon^*} \frac{\partial T}{\partial x_n} \right] + \frac{\partial u_n T}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left[(a + a_t) \frac{\partial T}{\partial x_n} \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\left(\frac{\nu_t^3 \varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2} D_0} \right)^{2/\varepsilon^*} \frac{\partial k}{\partial x_n} \right] + \frac{\partial u_n k}{\partial x_n} = 2\nu_t S_{nm}^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\nu + \nu_t}{\text{Pr}_K} \frac{\partial k}{\partial x_n} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\left(\frac{\nu_t^3 \varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2} D_0} \right)^{2/\varepsilon^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right] + \frac{\partial u_n \varepsilon}{\partial x_n} &= 2C_{1\varepsilon} \nu_t \frac{\varepsilon}{k} S_{nm}^2 - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\nu + \nu_t}{\text{Pr}_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где p — давление; t — время; u_n — компоненты скорости, соответствующие координатам x_n ; T — температура; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность; a — температуропрово-

дность; k — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации; D_0 — параметр, пропорциональный скорости диссипации энергии, параметр ε^* равен четырем,

$$A_d = \tilde{A}_d \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad \tilde{A}_d = \frac{d^2 - d}{2d(d+2)}, \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad B_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{d^2 - d - 2}{4d(d+2)}.$$

Здесь d — размерность пространства; Γ — гамма-функция. Кроме того, $\text{Pr}_\varepsilon = \text{Pr}_K$, $C_{1\varepsilon} = 1,42$ и $C_{2\varepsilon} = 1,68$ [2, 3].

Турбулентная вязкость ν_t определяется по формуле [4]

$$\nu_t = 0,0847 \frac{k^2}{\varepsilon},$$

а турбулентная температуропроводность a_t определяется через турбулентное число Прандтля и турбулентную вязкость [4].

На основании работы [4]

$$2D_0 \frac{S_d}{(2\pi)^d} = 1,575\varepsilon. \quad (5)$$

Учитывая соотношения для скорости диссипации $\varepsilon = \nu_t (\partial u_n / \partial x_m)^2$ и соотношение (5), преобразуем второе слагаемое левой части (1) для $\varepsilon^* = 4$ к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[B_d \left(\frac{\nu_t^3 \varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2} D_0} \right)^{2/\varepsilon^*} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right] = B_d \left(\frac{8S_d}{(2\pi)^d 3A_d^3 1,575} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \nu_t}{\partial x_m}. \quad (6)$$

В работе [5] на основе теории TSDIA (two-scale direct-interaction approximation) показано, что эффективная турбулентная вязкость равна

$$\nu_G = \nu_t - C_{G1} \frac{k}{\varepsilon} \frac{D\nu_t}{Dt},$$

где $C_{G1} = 0,078$, D — полная производная. Используя соотношения для скорости диссипации, можно показать

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left[\left(C_{G1} \frac{k}{\varepsilon} \frac{D\nu_t}{Dt} \right) \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right] = \frac{C_{G1}}{\sqrt{C_\nu}} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{D\nu_t}{Dt}, \quad (7)$$

что согласуется по структуре с (6). При этом численное значение коэффициента

$$s = B_d \left(\frac{8S_d}{(2\pi)^d 3A_d^3 1,575} \right)^{1/2} \quad (8)$$

в (6) равно 0,97, в то время как значение коэффициента в (7) — 0,26.

Для апробации предложенной модели рассмотрим две модельные задачи. Первая — это осциллирующее течение в плоском канале с высотой $2h$ (вдоль оси y), когда градиент давления по продольной координате x изменяется по гармоническому закону

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(t) = A \cos(\omega t) = A \text{Re} e[\exp(i\omega t)].$$

Уравнение движения при этом имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + s \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \nu_t}{\partial y} = A \exp(i\omega t) + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (9)$$

где $s = 0,97$. Для турбулентной вязкости применяем простую модель турбулентной вязкости — модель пути смешения Прандтля

$$\nu_t = (\chi y)^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (10)$$

где $\chi = 0,4$ — константа Кармана.

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$u(t, y) = f(y) \exp(i\omega t). \quad (11)$$

Для того чтобы можно было использовать (11), необходимо линеаризировать последнее слагаемое (9). Поэтому в этом слагаемом для турбулентной вязкости используем линейную зависимость, которая является следствием логарифмического профиля скорости. Такой подход предложен в [6]. Таким образом,

$$\nu_t = \chi y u_\tau, \quad (12)$$

где u_τ — скорость трения.

Учитывая сказанное, представим (9) с учетом (10) и (12) в виде

$$i\omega f + i\omega s \chi^2 \frac{d}{dy} (y^2 f) = A + \frac{d}{dy} \left[(\nu_0 + \chi y u_\tau) \frac{df}{dy} \right].$$

После обезразмеривания получаем

$$(b + z - i\varpi s \chi^2 z^2) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + (1 - 2i\varpi s \chi^2 z) \frac{d\phi}{dz} - i\varpi \phi = -B, \quad (13)$$

где

$$\varpi = \frac{\omega h}{\chi u_\tau}, \quad \phi = \frac{f}{u_\tau}, \quad B = \frac{Ah}{u_\tau}, \quad b = \frac{\nu_0}{\chi u_\tau h}, \quad z = \frac{y}{h}.$$

Далее, на основе замены

$$\xi = \frac{1 - 2i\varpi s \chi^2 z}{\sqrt{1 + 4ib\varpi s \chi^2}}.$$

Преобразуем уравнение (13) к

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\phi}{d\xi} - \frac{1}{s\chi^2} \phi = -\frac{B}{s\omega}.$$

Это неоднородное уравнение Лежандра. Его решение с граничными условиями $\phi = 0$ при $z = 0$, $\phi' = 0$ при $z = 1$ имеет следующий вид:

$$\phi(\xi) = \frac{i\vartheta P_n(1)[Q_n(0) - Q_n(\xi)] + \theta P_n(1)[Q_n(\xi) - Q_n(0)] - Q_n(1)[P_n(0) - P_n(\xi)][\theta - i\vartheta]}{[i\theta - \vartheta]P_n(1)Q_n(0) + [i\theta + \vartheta]P_n(0)Q_n(1)}, \quad (14)$$

где $P_n(\xi)$ и $Q_n(\xi)$ — функции Лежандра первого и второго рода, соответственно,

$$n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{s\chi^2 - 4}{s\chi^2} + 1} \right), \quad \vartheta = [i + 2\varpi s\chi^2][i + 4b\varpi s\chi^2], \quad \theta = [i + 4b\varpi s\chi^2] \sqrt{1 + 4ib\varpi s\chi^2}.$$

Подставляя (14) в (1) и выделяя реальную часть полученного выражения, приходим к распределению скорости. Осреднив квадрат этого распределения за период колебания, найдем среднеквадратичную скорость $w(z) = u^2(z)/u_\tau^2 = |\phi(z)|^2/2$.

В случае $s = 0$ (стандартная модель) уравнение (13) трансформируется в уравнение Бесселя. Среднеквадратичная скорость при этом выражается через функции Кельвина.

Анализ результатов расчетов для случаев $s = 0,97$ и $s = 0$ показал следующее. Влияние параметра s начинает проявляться при увеличении частоты колебаний, т. е. при усилении нестационарности. При $\varpi = 1$ обе модели дают монотонно увеличивающийся профиль и при обоих значениях параметра s ($s = 0,97$ и $s = 0$) профили скорости практически совпадают. При более высоких частотах $\varpi = 10$ проявляется аннулярный эффект Ричардсона, когда максимум среднеквадратичной скорости смещается от центра канала (рис. 1, а). В данном случае обе модели по-прежнему дают одинаковый результат. Начиная, приблизительно, со значения $\varpi = 100$ (рис. 1, б), наблюдается отличия в профилях скорости, посчитанных по

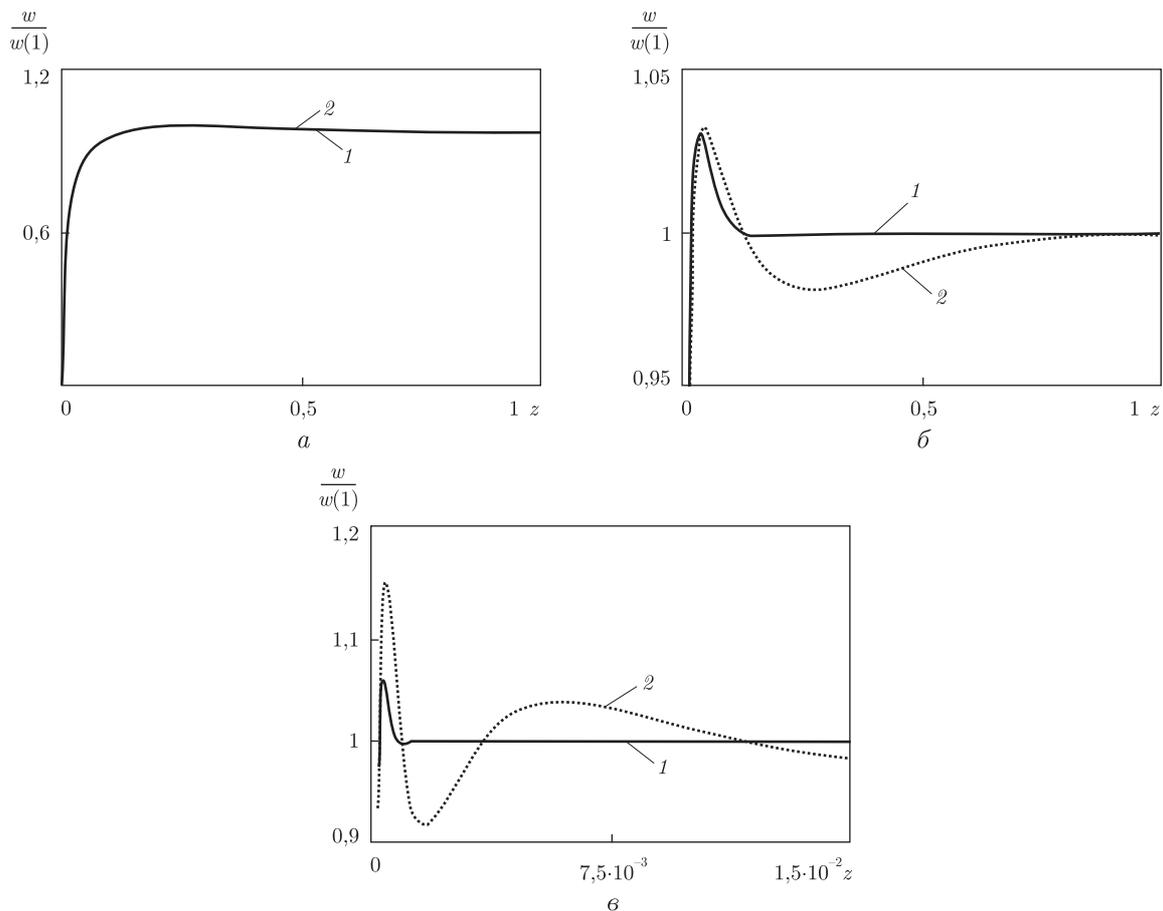


Рис. 1. Профили скорости при осцилляционном течении в канале: а — $\omega = 10$; б — 10^2 ; в — 10^5 ; 1 — $s = 0$, 2 — $0,97$

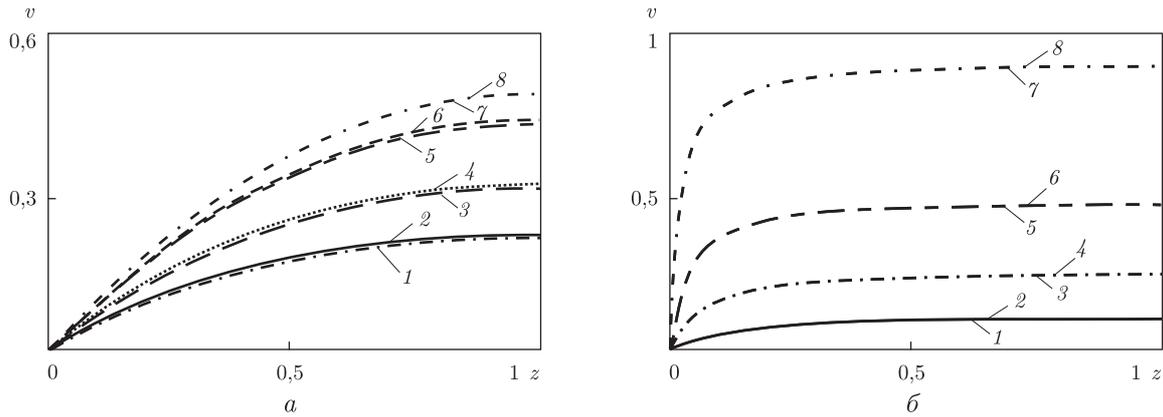


Рис. 2. Профили скорости при разгонном течении в канале: $a - \text{Re} = 1$; $b - 500$; $1 - s = 0,97$, $\text{Fo} = 0,25$; $2 - 0, 0,25$; $3 - 0,97, 0,45$; $4 - 0, 0,45$; $5 - 0,97, 1$; $6 - 0, 1$; $7 - 0,97, 10$; $8 - 0, 10$

модели $s = 0$ и $s > 0$. Это естественно, так как модель $s > 0$ как раз и учитывает дополнительное влияние нестационарности на турбулентные процессы. При дальнейшем росте частоты результаты расчета по модели $s > 0$ показывают проявление двойного аннулярного эффекта Ричардсона, когда профиль скорости имеет два максимума (рис. 1, в). С увеличением частоты увеличивается разница в значениях максимумов скорости.

Второй пример, который мы рассмотрим, — это разгонное течение в плоском канале высотой $2h$ (вдоль оси y), при условии, что продольный градиент давления описывается функцией Хевисайда:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(t) = A \hat{H}(t).$$

В этом случае систему уравнений в безразмерной форме удобно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial \text{Fo}} + s \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial z} = 1 + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + \bar{v}_t \text{Re}) \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad (15)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \text{Fo}} + s \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{v}_t \frac{\partial K}{\partial z} / \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{\bar{v}_t \text{Re}}{\text{Pr}_k} \right) \frac{\partial K}{\partial z} \right] + \bar{v}_t \text{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - E \text{Re}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \text{Fo}} + s \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{v}_t \frac{\partial E}{\partial z} / \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{\bar{v}_t \text{Re}}{\text{Pr}_\varepsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial z} \right] + C_{1\varepsilon} \bar{v}_t \frac{E}{K} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \text{Re} - C_{2\varepsilon}^* \frac{E^2}{K} \text{Re}, \quad (17)$$

где

$$v = \frac{u}{U_m}, \quad \text{Fo} = \frac{th^2}{\nu}, \quad \bar{v}_t = \frac{\nu_t}{U_m h}, \quad \text{Re} = \frac{U_m h}{\nu}, \quad U_m = A \frac{h^2}{\nu}, \quad K = \frac{k}{U_m^2}, \quad E = \frac{\varepsilon h}{U_m^3}, \quad (18)$$

U_m — величина, пропорциональная среднерасходной скорости при установившемся течении.

Результаты расчета по модели (15)–(17) представлены на рис. 2. Видно, что при более высоком числе Рейнольдса влияние нестационарной ренормгрупповой поправки ($s > 0$) практически не ощущается. Имеется слабое влияние указанной поправки при малых числах Рейнольдса, но при этом профили скорости носят ярко выраженный ламинарный характер.

Проведенные расчеты показали, что ренормгрупповая поправка, обусловленная нестационарностью турбулентного процесса, оказывает заметное влияние на характеристики потока при высокочастотных режимах. В случае небольших значений частоты пульсации и при монотонно развивающихся процессах влияние указанной поправки практически незаметно и для расчетов таких процессов можно использовать традиционную математическую модель турбулентности. Кроме того, нужно отметить, что при монотонно протекающем нестационарном турбулентном процессе влияние ренормгрупповой поправки на нестационарность убывает с ростом числа Рейнольдса.

1. Авраменко А. А. Ренормгрупповой анализ нестационарной турбулентности // Доп. НАН України. – 2007. – № 12. – С. 88–93.
2. Smith L. M., Reynolds W. C. On the Yakhot–Orszag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models // Phys. Fluids A. – 1992. – 4, No 2. – P. 364–390.
3. Yakhot V., Smith L. M. The renormalization group, the ϵ -expansion and derivation of turbulence models // J. Sci. Comput. – 1992. – 7. – P. 35–52.
4. Yakhot V., Orszag S. A. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // J. Sci. Comp. 1986. – 1, No 1. – P. 3–51.
5. Yoshizawa A., Nisizima S. A nonequilibrium representation of turbulent viscosity based on a two-scale turbulence theory // Phys. Fluids A. – 1993. – 5, No 12. – P. 3302–3304.
6. Попов Д. Н. Нестационарные гидромеханические процессы. – Москва: Машиностроение, 1982. – 240 с.

*Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 25.08.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Avramenko**

Approbation of a renormalization group model for unsteady turbulence

Two types of flows are analyzed on the basis of the RNG $k - \epsilon$ model of turbulence for unsteady streams. The first problem is the oscillating flow in a flat channel; the second one is the up-start flow in a flat channel. The results allow defining the range of parameter values, in which the account of renormalization unsteady corrections to turbulent flows is necessary.