УДК 517.96

Я. М. Дрінь

Пряма і обернена задачі для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Досліджується розв'язність прямої і оберненої задач для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором з однорідним негладким у точці 0 символом.

Серед нових розділів теорії псевдодиференціальних операторів (ПДО) на особливу увагу заслуговують рівняння з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами, як лінійні, так і нелінійні. Як зазначено в [1], вони мають важливі застосування в теорії випадкових процесів, сучасній теорії фракталів та ін. Лінійні параболічні псевдодиференціальні рівняння (ППДР) з негладкими символами були визначені С. Д. Ейдельманом і Я. М. Дрінем, дослідження задачі Коші для таких рівнянь було розпочате в [2] і продовжене А. Н. Кочубеєм (див. [1] і наведену там бібліографію), який запропонував трактувати ПДО як гіперсингулярні інтеграли, В. В. Городецьким, В. А. Літовченком, М. В. Федорюком, Ю. А. Дубінським та ін. Отримано важливі результати щодо коректної розв'язності задачі Коші для таких рівнянь в різних функціональних просторах, властивості їхніх розв'язків, зокрема, інтегральних зображень, поведінки розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємності та стабілізації за Ляпуновим. Багатоточкові задачі для еволюційних ПДР вивчалися В. В. Городецьким і Я. М. Дрінем [3–5]. Для квазілінійного параболічного рівняння з ПДО досліджено глобальну розв'язність задачі Коші в [6, 7]. У той же час треба зазначити, що обернені задачі для таких рівнянь не досліджувалися.

У [8] наводиться історія вивчення обернених задач для диференціальних рівнянь, починаючи від першої оберненої задачі — кінематичної задачі сейсміки, яка в одновимірному випадку вперше була розв'язана Герглотцем. Підсумовуючою працею Львівської школи з теорії обернених задач для параболічних диференціальних рівнянь є монографія [9] керівника цієї школи М. І. Іванчова, яка базується на результатах автора і істотно розширює і завершує результати його учнів.

У даній роботі досліджуються пряма і обернена задачі для одного класу еволюційних ПДР методом неповного відокремлення змінних та із застосуванням перетворення Лапласа і узагальненого перетворення Фур'є.

1. Постановка прямої задачі. Основний результат. Введемо позначення:

1) $z \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_a \equiv \{z; z \geqslant a\}$, $\mathbb{R}_0 \equiv \mathbb{R}_+$; всюди $y \in \mathbb{R}_0$, $t \in \mathbb{R}_0$;

2) $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \equiv (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$; $\Pi_+ \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $\Pi \equiv \Pi_+ \times \mathbb{R}_+$, $\Pi_0 \equiv \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$; всюди $(x, y, t) \in \Pi$, $(x, y) \in \Pi_+$, $(y, t) \in \Pi_0$, $(x, t) \in \Pi_+$;

3) числа $\gamma > 0$, $\mu > 0$, $c_k > 0$, $k \equiv (k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $a_\gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a_\gamma(\mu\sigma) = \mu^\gamma a_\gamma(\sigma)$, $|D^k a_\gamma(\sigma)| \leqslant c_k |\sigma|^{\gamma - |k|}$, $|k| \geqslant 2n + 2[\gamma] + 1$, $[\gamma]$ — ціла частина γ; a_γ — символ ПДО A_γ, що діє за просторовою змінною $x \in \mathbb{R}^n$;

4) $V \colon \Pi \to \mathbb{R}$ неперервно диференційовна за t, двічі неперервно диференційовна та інтегровна за x, y; V_t, V_y, V_{yy} — частинні похідні,

$$A_\gamma V(x, y, t) = F^{-1}_{\sigma \to x}[a_\gamma(\sigma) F_{x \to \sigma}[V(x, y, t)]], \qquad (x, y, t) \in \Pi,$$

де $F_{x\to\sigma}$ і $F^{-1}_{\sigma\to x}$ — відповідно пряме і обернене перетворення Фур'є, є псевдодиференціальна операція (ПДО), яка тлумачиться як гіперсингулярна інтегральна операція (ГСІО) [1]. Позначимо також

$$AV(x,y,t) \equiv V_t(x,y,t) + A_\gamma V(x,y,t), \qquad (x,y,t) \in \Pi,$$

функція $q\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — відома неперервна і обмежена,

$$BV(x,y,t) \equiv V_{yy}(x,y,t) - q(y)V(x,y,t), \qquad (x,y,t) \in \Pi.$$

1.1. Постановка прямої задачі. Треба визначити розв'язок $V\colon \Pi \to \mathbb{R}$ рівняння

$$AV(x,y,t) = BV(x,y,t), \qquad (x,y,t) \in \Pi, \tag{1}$$

який задовольняє такі початкові та крайові умови

$$\left.\begin{array}{ll} V(x,y,t)|_{t=0} = V_0(x)\lim\limits_{n\to\infty} V_{0n}(y), & (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}, \\ V_y(x,y,t)|_{y=0} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \end{array}\right\} \tag{2}$$

де $V_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неперервна і обмежена функція, $V_{0n}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — деяка δ-подібна послідовність при $n \to \infty$, а границя розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій; існує стала $a > 0$ і така, що $\forall y \in \mathbb{R}^+$:

$$q(y) \geqslant a. \tag{3}$$

1.2. Формула для розв'язку прямої задачі. Задача (1), (2) методом неповного відокремлення змінних розпадається на дві задачі, які розв'язуються окремо. Основним результатом прямої задачі (1), (2) є доведення формули для її розв'язку:

$$V(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} G_\gamma(t, x-\xi)V_0(\xi)\,d\xi \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

де функції $G_\gamma(t,x)$ визначені в задачі 1, а $\varphi(y,\lambda)$ є розв'язком задачі

$$-\varphi''_{yy} + q(y)\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi(0,\lambda) = 1, \qquad \varphi'_y(0,\lambda) = 0, \tag{4}$$

$\sigma(\lambda)$ — спектральна функція розподілу [10].

Зауваження. Якщо $V_0(x) = \lim\limits_{n\to\infty} V_{0n}(x)$, де V_{0n} — δ-подібна послідовність при $n \to \infty$, а границя розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\gamma(x-\xi,t)V_0(\xi)\,d\xi \equiv G_\gamma(x,t) * V_0(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta(x) * G_\gamma(x,t) = G_\gamma(x,t), \qquad (x,t) \in \Pi_+.$$

Тоді

$$V(x,y,t) = G_\gamma(x,t)\int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda t\}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \qquad (x,y,t) \in \Pi.$$

2. Розщеплення оператора методом неповного відокремлення змінних. Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$V(x,y,t) = X(x,t)Y(y,t), \qquad (x,y,t) \in \Pi, (x,t) \in \Pi_+, \qquad (y,t) \in \Pi_0.$$

Тоді задача для визначення $V(x,y,t)$ розпадається на дві задачі.

Задача 1. Знайти функцію $X\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ таку, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial X(x,t)}{\partial t} + A_\gamma X(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Pi_+$$

і умови

$$X(x,t)|_{t=0} = V_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \lim_{|x|\to\infty} X(x,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

де $V_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неперервна і обмежена функція.

Розв'язок цієї задачі

$$X(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\gamma(x-\xi,t)V_0(\xi)\,d\xi, \qquad (x,t) \in \Pi_+, \tag{5}$$

де вираз для G_γ залежить від γ і $a_\gamma\colon \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$. Зокрема:

1) при $\gamma = 1$, $a_\gamma = |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$ і в [11] доведено, що

$$G_1(x,t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \qquad (x,t) \in \Pi_+;$$

2) при $\gamma = 2$, $a_\gamma = |\sigma|^2$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$ отримуємо фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності

$$G_2(x,t) = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\}, \qquad (x,t) \in \Pi_+;$$

3) при $\gamma \geqslant 1$, a_γ із п. 1, функція $G_\gamma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ вивчалася в [1, 2],

$$G_\gamma(x,t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - a_\gamma(\sigma)t\}\,d\sigma, \qquad (x,t) \in \Pi_+.$$

При $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$ функція $G_\gamma(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ [12].

Оцінки функції G_γ та її похідних

$$|D_x^\chi G_\gamma(x,t)| \leqslant C_\chi t(t^{1/\gamma}+|x|)^{-n-\gamma-|\chi|}, \qquad |\chi| \leqslant N - 2n - [\gamma],$$

$$|D_t G_\gamma(x,t)| \leqslant Ct(t^{1/\gamma}+|x|)^{-n-\gamma}, \qquad N \geqslant 2n + 2[\gamma] + 1,$$

наведені в [1, 13, 14], дозволяють довести, що функція (5) є розв'язком задачі 1.

Зауважимо, що методика доведення оцінок похідних функцій G_γ, розроблена для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами в [1] і перенесена на випадок таких систем авторами (див. також [11, с. 47–58]) при $\gamma \geqslant 1$, є вірною фактично і при $\gamma > 1/2$. У праці [14] ця методика тривіально переноситься на випадок $\gamma > 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, де розглядаються більш загальні системи.

Задача 2. Знайти функцію $Y\colon \Pi_0 \to \mathbb{R}$ таку, що є розв'язком задачі

$$\frac{\partial Y(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y(y,t)}{\partial y^2} - q(y)Y(y,t), \qquad (y,t) \in \Pi_0, \tag{6}$$

$$Y(y,t)|_{t=0} = \lim_{n\to\infty} Y_{0n}(y), \qquad y \in \mathbb{R}_+, \qquad \left.\frac{\partial Y(y,t)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

де Y_{0n} — δ-подібна послідовність при $n \to \infty$, а границя розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій.

Отже, розв'язок задачі (1)–(3) можна записати у вигляді

$$V(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\gamma(t, x-\xi)V_0(\xi)\,d\xi \cdot Y(y,t), \qquad (x,y,t) \in \Pi.$$

3. Розв'язок прямої задачі (6), (7), (3). Доведемо, що функція $Y\colon \Pi_0 \to \mathbb{R}$ записується у вигляді

$$Y(y,t) = \int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda t\}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \qquad (y,t) \in \Pi_0, \tag{8}$$

де функція $\varphi(y,\lambda)$, що є розв'язком задачі на власні значення (4), і функція $q\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ зв'язані взаємно однозначною відповідністю зі спектральною функцією розподілу $\sigma(\lambda)$ [10].

Вірною є така теорема.

Теорема 1 (про єдиність розв'язку прямої задачі). *Розв'язком рівняння* (6) *з нульовими умовами* (7) *є тотожний нуль. Розв'язок задачі* (6), (7) *однозначно визначається додатною функцією* $q(y)$.

Доведення. Доведення проведемо в кілька етапів, використовуючи [10].

1. Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння з частинними похідними (6), отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$-LY''_{yy}(p,y) + q(y)LY(p,y) = Y_0(y) - pLY(p,y), \qquad \operatorname{Re} p > 0, \qquad y \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

і умову

$$LY'_y(p,y)|_{y=0} = 0, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

2. Розв'язування рівняння (9). До рівняння (9) застосуємо пряме узагальнене перетворення Фур'є. Для чого обидві частини (9) домножимо на функцію $\varphi(y,\lambda)$ і проінтегруємо за $y \in \mathbb{R}_+$. Тоді (9) набуде вигляду

$$F(p,\lambda) = \frac{1}{p+\lambda}, \qquad \operatorname{Re} p > 0, \qquad \lambda \geqslant a,$$

де

$$F(p,\lambda) = \int\limits_0^\infty LY(p,y)\varphi(y,\lambda)\,dy, \qquad \operatorname{Re} p > 0, \qquad \lambda \geqslant a.$$

Застосуємо до $F(p,\lambda)$ обернене узагальнене перетворення Фур'є

$$LY(p,y)=\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(y,\lambda)}{p+\lambda}\,d\sigma(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,p>0, \qquad y\in\mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Оскільки

$$\frac{1}{p+\lambda}=\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+p)t}\,dt, \qquad \mathrm{Re}\,p>0, \qquad \lambda\geqslant a,$$

і

$$\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(y,\lambda)}{p+\lambda}\,d\sigma(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right\}dt, \qquad \mathrm{Re}\,p>0, \qquad y\in\mathbb{R}_+, \tag{11}$$

то праву частину формули (10) можна тлумачити як двічі застосоване перетворення Лапласа до функції φ. Підставляючи (11) в (10), отримуємо, що

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\left\{Y(y,t)-\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right\}dt=0, \qquad \mathrm{Re}\,p>0, \qquad y\in\mathbb{R}_+,$$

а звідси, використовуючи властивість перетворення Лапласа, знаходимо, що шукана функція $Y(y,t)\colon \Pi_0\to\mathbb{R}$ визначається рівністю (8).

3. Перевіряємо безпосередньо, що функція $Y(y,t)$ задовольняє рівняння і крайову умову.

Теорема 1 доведена.

4. Обернена задача. Нехай $V(x,y,t)$ є розв'язком задачі (1), (2). Зафіксуємо точку $x=x_0$, $y=0$ в Π_+ і припустимо, що відоме значення V при всіх $t>0$ і $x=x_0$, $y=0$:

$$V(x,y,t)|_{x=x_0,y=0}\equiv\psi(x_0,t), \qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

де ψ — відома функція.

Треба визначити функцію $q\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, неперервну і обмежену.

Розв'язок оберненої задачі випливає з [10]. Справді, підставивши $x=x_0$ і $y=0$ у формулу для V із п. 1.2 і врахувавши, що $\varphi(0,\lambda)=1$, отримаємо рівняння

$$\psi(x_0,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\gamma(x_0-\xi,t)V_0(\xi)\,d\xi\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}d\sigma(\lambda), \qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

де $\psi(x_0,t)$ — відома функція, а $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geqslant a$, — невідома. З [10] відомо, що $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geqslant a$, зв'язана взаємно однозначною відповідністю з неперервною і обмеженою функцією q, тобто за відомою функцією $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geqslant a$, однозначно знаходиться функція q. У свою чергу, функція $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geqslant a$, однозначно визначається функцією $\psi(x_0,t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Отже, вірною є така теорема.

Теорема 2. *У класі обмежених і неперервних функцій невідома функція* $q\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *рівняння* (1) *однозначно визначається відомою функцією* $\psi(x_0,t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.

1. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909–934.
2. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60–69.
3. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь // Наук. вісн. Чернівецьк. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 336–337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 63–77.
4. *Дрінь Я. М.* Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу // Наук. вісн. Чернівецьк. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 501. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 24–32.
5. *Дрінь Я. М.* Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. НАН України. – 2010. – № 7. – С. 7–11.
6. *Дрінь Я. М.* Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння з негладким символом // Наук. вісн. Чернівецьк. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 18–22.
7. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-тех. поля. – 1999. – **42**, № 2. – С. 31–38.
8. *Аниконов Ю. Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1978. – 120 с.
9. *Ivanchov M. I.* Inverse problem for equations of parabolic type. – Lviv, 2003. – Vol. 10. – 238 p.
10. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**. – С. 309–360.
11. *Дрінь Р. Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Львів, 1997. – 137 с.
12. *Голубов Б. И.* О методе суммирования типа Абеля–Пуассона кратных рядов Фурье // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 1. – С. 49–59.
13. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Матем. исследования. – 1981. – Вып. 63. – С. 18–33.
14. *Литовченко В. А.* Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами // Сиб. мат. журн. – 2008. – **49**, № 2. – С. 374–393.

Буковинська державна фінансова академія, Чернівці

Надійшло до редакції 29.07.2010

Ya. M. Drin'

The direct and inverse problems for one class of equations with pseudodifferential operator

The solvability of the direct and inverse problems for one class of equations with a pseudodifferential operator with a homogeneous non-smooth symbol at the point 0 is investigated.