УДК 517.5

Т. В. Ломако

Теоремы сходимости и компактности для уравнений Бельтрами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Доведено ряд теорем збіжності та компактності класів регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на дилатацію.

В данной работе рассмотрены отображения класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с ограничениями на дилатацию интегрального типа. Различные классы отображений, квазиконформных в среднем, изучались в работах Л. Альфорса, Б. Боярского, А. Гольберга, В. Гутлянского, В. Зорича, Т. Иванца, В. Кругликова, С. Крушкаля, В. Кудьявина, Р. Кюнау, Г. Мартина, В. Миклюкова, М. Перовича, И. Песина, В. Рязанова, Ю. Стругова, Г. Суворова и других исследователей (см., напр., [1–9]). Некоторые из них посвящены вопросам компактности и сходимости таких классов. Одним из важных приложений теорем компактности является теория вариационного метода. Дело в том, что в секвенциально компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе нелинейных, функционалов. Кроме того, как правило в компактных классах удается показать выпуклость множества комплексных характеристик, что значительно упрощает построение вариаций.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $\mu(z)\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z)\colon = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} - \tag{2}$$

максимальной дилатацией или просто *дилатацией* уравнения (1).

Точка дифференцируемости называется *регулярной точкой* отображения f, если его якобиан в этой точке отличен от нуля:

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0. \tag{3}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием того, что гомеоморфизм, имеющий хотя бы одну регулярную точку, сохраняет ориентацию, является положительность якобиана во всех регулярных точках (см., напр., [10, с. 10]).

Под *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D будем понимать гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, частные производные которого удовлетворяют (1) и (3) п. в. в D. Понятие регулярного решения впервые введено в работе [11].

Обозначим через h *сферическое (хордальное)* расстояние между точками z_1 и z_2 в $\overline{\mathbb{C}}$:

$$h(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, \qquad z_1,z_2\neq\infty, \qquad h(z_1,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}.$$

Элемент сферической площади в $\overline{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$dS(z)\colon =\frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2}.$$

Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений из области $D\subseteq\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *нормальным*, если каждая последовательность отображений f_m из $\mathfrak{F}$ имеет подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится к непрерывному отображению $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ равномерно на каждом компактном множестве $K\subset D$ относительно сферической метрики. Наконец, класс отображений $\mathfrak{F}$ называется *компактным*, если $\mathfrak{F}$ нормален и замкнут.

Теоремы сходимости. Рассмотрим теоремы сходимости для уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на дилатацию.

Напомним, что функция $\Phi\colon\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$, где $\overline{\mathbb{R}^+}=[0,\infty]$, называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=\infty \tag{4}$$

(см. [12, с. 37]). *Непрерывность* Φ в дальнейшем понимается в топологии $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Следующая лемма является обобщением теоремы 1 в [13].

Лемма 1. *Пусть f, $f_n\colon D\to\mathbb{C}$ — сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ и пусть $f_n\to f$ при $n\to\infty$ локально равномерно в области $D\subseteq\mathbb{C}$. Тогда на любом открытом множестве $\Omega\subset D$*

$$\iint\limits_{\Omega}\Phi(K_\mu(z))\Psi(z)\,dxdy\leqslant\liminf_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_n}(z))\Psi(z)\,dxdy \tag{5}$$

для любой непрерывной строго выпуклой функции $\Phi\colon\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ и любой равномерно непрерывной функции $\Psi(z)\colon\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{R}}$ такой, что $1/\Psi(z)$ локально ограничена.

В дальнейшем мы используем функцию множества $M(\Omega)$, заданную на произвольных открытых множествах Ω в $\mathbb{C}$, которую всегда можно доопределить (и переопределить) на произвольных множествах E в $\mathbb{C}$, полагая

$$M_*(E)=\inf_{\Omega\supseteq E}M(\Omega). \tag{6}$$

Заметим, что функция множества $M_*(E)$ является монотонной по включению и полунепрерывной справа, т. е. если $E=\bigcap E_n$, то

$$M_*(E)\leqslant\liminf_{n\to\infty}M_*(E_n) \tag{7}$$

и существует такая последовательность (открытых) множеств $\Omega_n\supseteq E$, для которой

$$M_*(E)=\lim_{n\to\infty}M_*(\Omega_n)=\lim_{n\to\infty}M(\Omega_n). \tag{8}$$

Таким образом, произвольная функция $M(\Omega)$ открытого множества Ω в $\mathbb{C}$ допускает регулярную замену M_* с указанными свойствами (6)–(8).

Теорема 1. *Пусть f_n — последовательность регулярных решений уравнения Бельтрами* (1) *с комплексными коэффициентами μ_n в области $D \subseteq \mathbb{C}$. Предположим, что для каждого открытого множества $\Omega \subseteq D$*

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_n}(z))\, dS(z) \leqslant M(\Omega), \tag{9}$$

где $M(\Omega)$ — локально конечная функция открытого множества Ω в $\mathbb{C}$, а $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — непрерывная строго выпуклая функция.

Если $f_n \to f$ при $n \to \infty$ равномерно на каждом компактном множестве в D, где $f\colon D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм, то f является регулярным решением уравнения (1) *с комплексным коэффициентом μ таким, что*

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu}(z))\, dS(z) \leqslant M(\Omega) \tag{10}$$

для любого открытого множества $\Omega \subseteq D$.

Теоремы нормальности и компактности. Пусть $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — неубывающая выпуклая функция, а $M(\Omega)$ — функция открытого множества Ω в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathfrak{F}_{\Phi}^{M}$ класс всех регулярных решений $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) в $\mathbb{C}$ с комплексными коэффициентами μ такими, что

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu}(z))\, dS(z) \leqslant M(\Omega) \tag{11}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — непрерывная и строго выпуклая функция такая, что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{12}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$. Тогда класс $\mathfrak{F}_{\Phi}^{M}$ образует нормальное семейство для любой ограниченной функции $M(\Omega)$ открытого множества Ω в $\mathbb{C}$.

Теорема 3. *Пусть функция $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — непрерывная и строго выпуклая и удовлетворяет условию* (12). *Если f_n — последовательность отображений класса $\mathfrak{F}_{\Phi}^{M}$ такая, что $f_n \to f$ при $n \to \infty$ равномерно в $\overline{\mathbb{C}}$, то предельное отображение f является гомеоморфизмом.*

Теорема 4. *Пусть функция $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — непрерывная строго выпуклая и удовлетворяет условию* (12), *а функция $M(\Omega)$ открытого множества Ω в $\mathbb{C}$ ограничена. Тогда класс $\mathfrak{F}_{\Phi}^{M}$ является компактным.*

Отметим, что условие (12) является не только достаточным, но и необходимым условием компактности (и нормальности) классов $\mathfrak{F}_\Phi^M$. Отметим также, что в работе [9] показано, что условие (12) эквивалентно следующему условию:

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \log\Phi(t)\frac{dt}{t^2} = \infty, \qquad \Delta > 0 \tag{13}$$

(ср. работу [4]).

1. *Ahlfors L.* On quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1953. – **3**. – P. 1–58.
2. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. – 677 p.
3. *Golberg A.* Homeomorphisms with finite mean dilatations // Contemp. Math. – 2005. – **382**. – P. 177–186.
4. *Gutlyanskii V., Martio O., Sugawa T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – **357**, No 3. – P. 875–900.
5. *Крушкаль С. Л.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, No 3. – С. 517–519.
6. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения – новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 216 с.
7. *Песин И. Н.* Отображения, квазиконформные в среднем // Докл. АН СССР. – 1969. – **187**, No 4. – С. 740–742.
8. *Рязанов В. И.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, No 2. – С. 378–388.
9. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2010. – **7**, No 1. – P. 73–87.
10. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York: Springer, 1973.
11. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **54**, No 10. – P. 935–950.
12. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – Москва: Мир, 1974. – 160 с.
13. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, No 7. – С. 1009–1019.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 13.09.2010

T. V. Lomako

The convergence and compactness theorems for Beltrami equations

A number of convergence and compactness theorems for classes of regular solutions of the degenerate Beltrami equations with restrictions of the integral type on a dilatation is proved.