УДК 519.81

В. М. Михалевич

К моделированию системы принятия решения для необайесовских задач

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Здійснюється моделювання суб'єкта системи прийняття рішень (того, хто приймає рішення), який приймає конкретне рішення, орієнтуючись на ціль, що постала перед ним, — вибір суб'єктивно найкращого рішення. При цьому досліджуються взаємозв'язок розглянутих правил вибору переваг, які визначають різні критерії, а також умови збігу деяких із отриманих критеріїв.

Исследуется система принятия решения, представляющая собой пару: тот кто принимает решение (ТПР) — ситуация принятия решения (СПР) (см. [1, 2, 5–7]).

Определение 1. Схемой ситуации задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная четверка вида (X, Θ, U, g), где для произвольных непустых множеств X, Θ, U g является отображением из $\Theta \times U$ в X.

При этом множество X называется *множеством последствий* с алгеброй подмножеств Ξ, Θ — *множеством значений ненаблюдаемого параметра* с алгеброй подмножеств Σ, U — *множеством решений*, а g — *отображением последствий* ССЗР (X, Θ, U, g). Класс всех параметрических ССЗР вида (X, Θ, U, G) будем обозначать через $\mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}(X) := = \{(X, \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 2. *Правилом выбора предпочтений* (ПВП) для ЗР в классе ССЗР $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ (коротко ПВП в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$) будем называть всякое отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, определенное на $\mathbb{Z}'$ и сопоставляющее каждой $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'$ некоторую пару соответствий $(X, \succcurlyeq_Z)$ и $(U, \succcurlyeq_Z^*)$, т. е. $\pi = (\pi_1, \pi_2) \in (2^{(X^2)} \times 2^{(U^2)})^{\mathbb{Z}'}$, что будем обозначать также $\pi_Z = (\pi_{1Z}, \pi_{2Z}) = = ((X, \succcurlyeq_Z), (U, \succcurlyeq_Z^*))$. Класс всех ПВП в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ будем обозначать $\Pi(\mathbb{Z}')$.

Рассмотрим класс параметрических ССЗР с заданными отношениями предпочтений на соответствующих множествах последствий. Тогда каждой такой параметрической ССЗР соответствует упорядоченная четверка вида $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)$, где $(\succcurlyeq)$ — соответствующее отношение предпочтения на последствиях этой ситуации задачи решения (СЗР). Тогда через $\mathbf{Z}$ обозначим класс всех ССЗР вида $\mathcal{Z}$. А, как и выше, $\mathbf{Z}(X) := \{((X, \cdot), \cdot, \cdot, \cdot) \in \in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}((X, \succcurlyeq)) := \{((X, \succcurlyeq), \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}((X, \Theta)) := \{((X, \cdot), \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}((X, \succcurlyeq), \Theta) := = \{((X, \succcurlyeq), \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$. При этом ясно, что $\mathbf{Z} \subset \mathbb{Z}$ и т. д.

Определение 3. *Проекцией* ССЗР класса $\mathbf{Z}$ называется такое отображение $\text{Пр}\colon \mathbf{Z} \to \mathbb{Z}$, что для любой ССЗР $((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ $\text{Пр}(((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) = (X, \Theta, U, g)$.

Рассмотрим так называемые необайесовские задачи решения (ЗР) (см. [4, 6, 7]), расширив множество последствий X до множества *случайных последствий*, представляющих собой множество распределений на X следующего вида:

$$Y = \left\{(y\colon X \to [0,1])\colon \operatorname{card}\{x\colon y(x) \neq 0\} < \infty, \sum_{x \in X} y(x) = 1\right\}. \tag{1}$$

Определение 4. Для произвольных непустых множеств A, Θ и нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ отображение $f \in A^{\Theta}$ называется *ограниченным* относительно $(A, \succcurlyeq)$ (см. [4]), если существуют такие $a, b \in A$, что $a \succcurlyeq f(\theta) \succcurlyeq b$ для всех $\theta \in \Theta$.

Определение 5. Для произвольных непустых множеств (A, Θ), нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ и алгебры $\Sigma \subseteq 2^{\Theta}$ отображение $f \in A^{\Theta}$ называется Σ-*измеримым* относительно $(A, \succcurlyeq)$, если для всех элементов $a \in A$ множества $\{\theta\colon f(\theta) \succ a\}$ и $\{\theta\colon f(\theta) \succcurlyeq a\}$ принадлежат Σ.

Через $L_0(A, \Theta)$ будем обозначать множество всех Σ-измеримых конечнозначных отображений определенных на множестве Θ со значениями в множестве A, т. е. $f \in L_0(A, \Theta)$, если $\operatorname{card}\{f(\Theta)\} < \infty$ и $f^{-1}(a) \in \Sigma\ \forall a \in A$.

Определение 6. Для произвольных непустых множеств X, Θ и нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображение $f \in Y^{\Theta}$, где Y определяется согласно (1), будем называть *ограниченным* относительно $(X, \succcurlyeq)$, если отображения $\underline{f}, \overline{f} \in X^{\Theta}$, заданные на Θ как

$$\underline{f}(\theta) := \min\{x \in X\colon [f(\theta)](x) \neq 0\} \qquad \forall\, \theta \in \Theta,$$
$$\overline{f}(\theta) := \max\{x \in X\colon [f(\theta)](x) \neq 0\} \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

являются ограниченными относительно $(X, \succcurlyeq)$.

Определение 7. ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(Y, \Theta)$, где Y определяется согласно (1), будем называть *определяющей*, если

$$L_0(Y, \Theta) \subseteq g(\cdot, U) = \operatorname{co}[g(\cdot, U)] \subseteq Y^{\Theta}. \tag{2}$$

Через $L_{\succcurlyeq}(Y, \Theta)$ будем обозначать множество всех ограниченых и Σ-измеримых относительно нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображений на множестве Θ со значениями в множестве Y.

Определение 8. Под *необайесовской моделью* СЗР (МСЗР) для ССЗР $Z \in \mathbb{Z}(Y, \Theta)$ будем понимать упорядоченную пятерку вида $M := (Y, \Theta, U, g, \mathcal{I})$, где $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(Y, \Theta)$, где Y определяется согласно (1), а $\mathcal{I}$ — закономерность, описывающая механизм неопределенности значения ненаблюдаемого параметра $\theta \in \Theta$ из класса закономерностей $\mathcal{I}(\Theta)$.

Определение 9. *Моделью ПВП* (МПВП) (Ω-*параметрической моделью ПВП* (Ω-МПВП)) в классе ССЗР $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ будем называть конечную совокупность условий (аксиом) У на ПВП для класса $\mathbb{Z}'$, которые задают единственное ПВП (с точностью до параметра $\omega \in \Omega$, где Ω — множество значений параметра ω), и обозначать [У] в классе $\mathbb{Z}'$ (с параметром $\omega \in \Omega$).

Ниже приводятся некоторые условия на ПВП $\pi \in \Pi(\mathbb{Z}'(Y, \Theta))$.

Для любой определяющей ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(Y, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y, \Theta)$

Y1. Если $Z_i = (Y, \Theta, U_i, g_i) \in \mathbb{Z}'(Y, \Theta)$, $i = \overline{1, 2}$, то

а) $(Y, \succcurlyeq_{Z_1}) = (Y, \succcurlyeq_{Z_2}) \stackrel{\text{def}}{=} (Y, \succcurlyeq)$ — невырожденное, т. е. не для всех $y_1, y_2 \in Y$ выполняется $y_1 \succcurlyeq y_2$;

б) из $(y_1)_{\Theta} \succcurlyeq^{*}_{Z} (y_2)_{\Theta}$ следует $y_1 \succcurlyeq y_2$ $\forall\, y_1, y_2 \in Y$;

в) из $u_1, v_1 \in U_1$, $u_2, v_2 \in U_2$, $g_1(\theta, u_1) = g_2(\theta, u_2)$, $g_1(\theta, v_1) = g_2(\theta, v_2) \forall\, \theta \in \Theta$, $u_1 \succcurlyeq^{\star}_{Z_1} v_1$ следует $u_2 \succcurlyeq^{\star}_{Z_2} v_2$.

Y2. $(U, \succcurlyeq^{\star}_{Z})$ — нестрогий порядок.

Y3. Если $u_i \in U$, $i = \overline{1, 3}$, $u_1 \succ^{\star}_{Z} u_2$, $\alpha \in (0, 1)$, то $\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_3 \succ^{\star}_{Z} \alpha u_2 + (1 - \alpha) u_3$.

Y3.1. Если $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$ — попарно комонотонны, $u_1 \succ^{\star}_{Z} u_2$, $\alpha \in (0,1)$, то $\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_3 \succ^{\star}_{Z} \alpha u_2 + (1-\alpha)u_3$.

Y3.2. Если $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, $y \in Y$, $u_1 \succ^{\star}_{Z} u_2$, $\alpha \in (0,1)$, то $\alpha u_1 + (1-\alpha)y_{\Theta} \succ^{\star}_{Z} \alpha u_2 + (1-\alpha)y_{\Theta}$.

Y3.3. Если $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, $u_1 \succcurlyeq^{\star}_{Z} u_2$, $\alpha \in (0,1)$, то $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \succcurlyeq^{\star}_{Z} u_2$.

Y3.4. Если $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, $u_1 \sim^{\star}_{Z} u_2$, $\alpha \in (0,1)$, то $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \succcurlyeq^{\star}_{Z} u_2$.

Y4. Если $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$, $u_1 \succ^{\star}_{Z} u_2 \succ^{\star}_{Z} u_3$, то найдутся такие α, $\beta \in (0,1)$, что $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_3 \succ^{\star}_{Z} u_2 \succ^{\star}_{Z} \beta u_1 + (1-\beta)u_3$.

Y5. Если $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, $g(\theta, u_1) \succcurlyeq_{Z} g(\theta, u_2)$ для всех $\theta \in \Theta$, то $u_1 \succcurlyeq^{\star}_{Z} u_2$.

Y5.1. Если $u_i \in U$, $y_i \in Y$, $g(\theta, u_i) = y_i \ \forall\, \theta \in \Theta_1 \subseteq \Theta$, $i = \overline{1,2}$, $g(\theta, u_1) = g(\theta, u_2)$ для всех $\theta \in \Theta \setminus \Theta_1$, $u_1 \succ^{\star}_{Z} u_2$, то $y_1 \succ_{Z} y_2$.

Далее для произвольного подкласса ССЗР $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$ класса $\mathbb{Z}(Y,\Theta)$ будем относить:

к $\Pi_1(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ — все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям Y1, Y2, Y3, Y4, Y5;

к $\Pi_{13}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ — все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям Y1, Y2, Y3.1, Y3.3, Y4, Y5;

к $\Pi_{12}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ — все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям Y1, Y2, Y3.1, Y3.4, Y4, Y5;

к $\Pi_{11}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ — все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям Y1, Y2, Y3.1, Y4, Y5;

к $\Pi_{22}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ — все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям Y1, Y2, Y3.1, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5.

к $\Pi_{21}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ — все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям Y1, Y2, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5;

Через $\mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$ будем обозначать любой подкласс ССЗР класса $\mathbb{Z}(Y,\Theta)$, в котором для любой ССЗР $Z' = (Y,\Theta,U',g') \in \mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$ и любых $u'_i \in U'$, $i = \overline{1,2}$, найдется такая определяющая ССЗР $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$ и $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, что $g'(\theta, u'_i) = g(\theta, u_i) \ \forall\, \theta \in \Theta$, $i = \overline{1,2}$.

Через $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ будем обозначать любой такой класс $\mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$, что если $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$ — определяющая, фигурирующая в определении $\mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$, то для нее должно выполняться условие $g(\cdot, U) = L_0(Y,\Theta)$.

А через $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ будем обозначать любой подкласс ССЗР класса $\mathbf{Z}(Y,\Theta)$, элементы которого задают первую компоненту некоторого ПВП для $\mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$. При этом, если $((Y,\succcurlyeq),\Theta,U,g) \in \mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$, а $(Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$ является определяющей, фигурирующей в определении $\mathbb{Z}'_1(Y,\Theta)$, то для нее, наряду со свойством (2), должно выполняться условие ограниченности и Σ-измеримости относительно сужения $(Y,\succcurlyeq)$ на X для отображения $g(\cdot,u)$ при всех $u \in U$, т.е. $g(\cdot,U) = g(\cdot,U) \bigcap L_{\succcurlyeq}(Y,\Theta)$.

Далее, для любого класса $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ определим класс $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$, который будем обозначать $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$, следующим образом $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta) := \{(Y,\Theta,U',g')\colon (Y,\Theta,U,g) \in \mathit{\Pi p}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta),\ U' = \{u\colon u \in U, g(\cdot,u) \in L_0(Y,\Theta)\},\ g'(\theta,u) = g(\theta,u) \ \forall\, \theta \in \Theta \ \forall\, u \in U'\}$.

Теперь введем в рассмотрение соответствие $\chi_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}$ из $\mathbb{R}^X \times P(\Theta)$ в $\Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на Θ [см. 1, 2, 5–7]. Это соответствие определяется следующим образом. Если $\omega \in \mathbb{R}^X$, $P \in P(\Theta)$, $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'(Y,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, то $\chi_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P) := (\chi_{1\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P),\ \chi_{2\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P)) \in \Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, $[\chi_{1\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P)](Z) := (Y,\succcurlyeq_Z)$, $[\chi_{2\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P)](Z) := (U,\succcurlyeq^{*}_{Z})$ и для любых $y_i \in Y$, $u_i \in U$, где $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} x_{ij}$, $\alpha_{ij} \in [0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} = 1$, $x_{ij} \in X$, а $\forall\, \theta \in \Theta$ $g(\theta, u_i) = \sum\limits_{j=1}^{k(\theta,u_i)} \beta_j(\theta,u_i) g_j(\theta,u_i)$, $\beta_j(\theta,u_i) \in [0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{k(\theta,u_i)} \beta_j(\theta,u_i) = 1$, $g_j(\theta,u_i) \in X$, $k(\theta,u_i) \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,2}$,

$$y_1 \succcurlyeq_Z y_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} \omega(x_{1j}) \geqslant \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j} \omega(x_{2j}), \tag{3}$$

$$u_1 \succcurlyeq_Z^* u_2 \Leftrightarrow \min_{p \in P} \sum_{j=1}^{k(\theta,u_1)} \int\limits_{\Theta} \beta_j(\theta,u_1) \omega(g_j(\theta,u_1)) p(d\theta) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{p \in P} \sum_{j=1}^{k(\theta,u_2)} \int\limits_{\Theta} \beta_j(\theta,u_2) \omega(g_j(\theta,u_2)) p(d\theta). \tag{4}$$

Далее для произвольного непустого множества A определим в функциональном пространстве $\mathbb{R}^A$ отношение эквивалентности $(\overset{\text{ma}}{\approx})$ следующим образом. Для любых f, $g \in \mathbb{R}^A$ $f \overset{\text{ma}}{\approx} g \Leftrightarrow f = ag + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Тогда можно определить соответствие $\chi'_{\mathbb{Z}'(Y,\theta)}$ из $\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times P(\Theta))/\overset{\text{co}}{\approx}$ в $\Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ таким образом, что если $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{P}$ — классы эквивалентности с представителями соответственно ω и P, то $\chi'_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\widetilde{\omega}, \widetilde{P}) \overset{\text{def}}{=} \chi_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega, P)$.

И, наконец, определим соответствие $\mu_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}$ из $\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times Q(\Theta)$ в $\Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, где $Q(\Theta)$ — семейство всех емкостей на (Θ, Σ) следующим образом. Если $\widetilde{\omega}$ — класс эквивалентности по $(\overset{\text{ma}}{\approx})$ с представителем $\omega \in \mathbb{R}^X$, а $v \in Q(\Theta)$, $\pi = \mu_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega, v)$, $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(Y,\Theta) \subseteq$ $\subseteq \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, $\pi(Z) = ((Y, \succcurlyeq_z), (U, \succcurlyeq_z^*))$, то для любых $y_i \in Y$, $u_i \in U$, где $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} x_{ij}$, $\sum\limits_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} = 1$, $x_{ij} \in X$, а $\forall\, \theta \in \Theta$ $g(\theta,u_i) = \sum\limits_{j=1}^{k(\theta,u_i)} \beta_j(\theta,u_i) g_j(\theta,u_i)$, $\sum\limits_{j=1}^{k(\theta,u_i)} \beta_j(\theta,u_i) = 1$, $g_j(\theta,u_i) \in$ $\in X$, $k(\theta,u_i) \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,2}$, выполняется (3) и

$$u_1 \succcurlyeq_Z^* u_2 \Leftrightarrow \int\limits_{\Theta} \sum_{j=1}^{k(\theta,u_1)} \beta_j(\theta,u_1) \omega(g_j(\theta,u_1))\, dv \geqslant \int\limits_{\Theta} \sum_{j=1}^{k(\theta,u_2)} \beta_j(\theta,u_2) \omega(g_j(\theta,u_2))\, dv. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ $\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}$ — инъекция на $\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times$ $\times PF(\Theta)$ и $\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times PF(\Theta)) = \Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$, где $PF(\Theta)$ — семейство всех конечно-аддитивных мер на Θ.*

Следствие 1. *Для любого класса $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ условия Y1, Y2, Y3, Y4, Y5 на ПВП в классе $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X / \overset{ma}{\approx} \times PF(\Theta)$ — МПВП в классе $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$, т. е. [Y1, Y2, Y3, Y4, Y5] в $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{ma}{\approx}$ и $p \in PF(\Theta)$, при этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и p соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 2. *МСЗР $M = (Y, \Theta, U, g, p)$, где $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, а закономерность $p \in PF(\Theta)$, является полным математическим описанием ситуации для [Y1, Y2, Y3, Y4, Y5] в $\mathbb{Z}(Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{ma}{\approx}$ и $p \in PF(\Theta)$.*

Теорема 2. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *всякое ПВП* $\pi \in \Pi_1(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ *можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП* $\bar{\pi} \in \Pi_1(\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$. *При этом соответствие* $\chi'_{\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}|\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}\times PF(\Theta)$ *инъективно и* $\chi'_{\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}\times \times PF(\Theta)) = \Pi_1(\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$.

Следствие 3. *Для любого класса* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *условия Y1, Y2, Y3, Y4, Y5 на ПВП в классе* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *представляют собой* $\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}\times PF(\Theta)$ — *МПВП в классе* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$, *т. е. [Y1, Y2, Y3, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $p \in PF(\Theta)$, *при этом разным значениям параметров* $\tilde{\omega}$ *и* p *соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 4. *МСЗР* $M = (Y,\Theta,U,g,p)$, *где* $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \textit{Пр}\,\mathbf{Z}(Y,\Theta)$, *а закономерность* $p \in PF(\Theta)$, *является полным математическим описанием ситуации для [Y1, Y2, Y3, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}_{01}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $p \in PF(\Theta)$.

Теорема 3. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *соответствие* $\mu_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}$ *инъективно и* $\mu_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx}\times Q(\Theta)) = \Pi_{11}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$.

Следствие 5. *Для любого класса* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *условия Y1, Y2, Y3.1, Y3.4, Y4, Y5 на ПВП в классе* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *представляют собой* $\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}\times Q(\Theta)$ — *МПВП в классе* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$, *т. е. [Y1, Y2, Y3.1, Y3.4, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $v \in Q(\Theta)$, *при этом разным значениям параметров* $\tilde{\omega}$ *и* v *соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 6. *МСЗР* $M = (Y,\Theta,U,g,v)$, *где* $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, *а закономерность* $v \in Q(\Theta)$, *является полным математическим описанием ситуации для [Y1, Y2, Y3, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $v \in Q(\Theta)$.

Теорема 4. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *всякое ПВП* $\pi \in \Pi_{11}(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ *можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП* $\bar{\pi} \in \Pi_{11}(\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$. *При этом соответствие* $\mu_{\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}$ *инъективно и* $\mu_{\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}\times Q(\Theta)) = \Pi_{11}(\textit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$.

Следствие 7. *Для любого класса* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *условия Y1, Y2, Y3.1, Y3.4, Y4, Y5 на ПВП в классе* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *представляют собой* $\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}\times Q(\Theta)$-*МПВП в классе* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$, *т. е. [Y1, Y2, Y3.1, Y3.4, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $v \in Q(\Theta)$, *при этом разным значениям параметров* $\tilde{\omega}$ *и* v *соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 8. *МСЗР* $M = (Y,\Theta,U,g,v)$, *где* $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \textit{Пр}\,\mathbf{Z}(Y,\Theta)$, *а закономерность* $v \in Q(\Theta)$, *является полным математическим описанием ситуации для [Y1, Y2, Y3.1, Y3.4, Y4, Y5] в* $\textit{Пр}\,\mathbf{Z}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $v \in Q(\Theta)$.

Теорема 5. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *соответствие* $\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}$ *инъективно и* $\chi_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx}\times P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}) = \Pi_{21}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$.

Следствие 9. *Для любого класса* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *условия Y1, Y2, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5 на ПВП в классе* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *представляют собой* $\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}\times P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$-*МПВП в классе* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$, *т. е. [Y1, Y2, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$, *при этом разным значениям параметров* $\tilde{\omega}$ *и* P *соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 10. *МСЗР* $M = (Y,\Theta,U,g,P)$, *где* $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, *а закономерность* $P \in P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$, *является полным математическим описанием ситуации для [Y1, Y2, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$.

Теорема 6. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *всякое ПВП* $\pi \in \Pi_{21}(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ *можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП* $\bar{\pi} \in \Pi_{21}(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$. *При этом соответствие* $\chi'_{\mathrm{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}$ *инъективно и* $\chi'_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}) = \Pi_{21}(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$.

Следствие 11. *Для любого класса* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *условия Y1, Y2, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5 на ПВП в классе* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *представляют собой* $\mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx} \times P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$*-МПВП в классе* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$, *т. е. [Y1, Y2, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5] в* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$, *при этом разным значениям параметров* $\widetilde{\omega}$ *и* P *соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 12. *МСЗР* $M = (Y,\Theta,U,g,P)$, *где* $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathit{Пр}\,\mathbf{Z}(Y,\Theta)$, *а закономерность* $P \in P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$, *является полным математическим описанием ситуации для [Y1, Y2, Y3.2, Y3.4, Y4, Y5] в* $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{ma}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}$.

Теорема 7. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$

$$\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}) \bigcap \mu_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times Q(\Theta)) = \Pi_{22}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)).$$

Теорема 8. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$

$$\chi'_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}) \bigcap \mu_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times Q(\Theta)) = \Pi_{22}(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)).$$

Определение 10. Статистическая закономерность $P \in P(\Theta)$ называется *емкой*, если найдется такая неаддитивная вероятность (емкость) $v \in Q(\Theta)$, что для всякой $f \in B(\Theta)$ имеет место $\int\limits_{\Theta} f\,dv = \min\limits_{p\in P} \int\limits_{\Theta} f(\theta)p(d\theta)$, где $B(\Theta)$ — множество всех $\sum$-измеримых ограниченных функций на Θ, а в левой части равенства стоит интеграл Шоке (см. [4]).

Множество всех емких статистических закономерностей на Θ будем обозначать через $P_1(\Theta)$.

Теорема 9. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ $\Pi_{13}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) = \mu_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times Q_{\mathrm{co}}(\Theta)) = \chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times P_1(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}) = \Pi_{12}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) = \Pi_{22}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$ *и при этом для любых* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx}$, *для любых* $\omega \in \widetilde{\omega}$ *и для любых* $v \in Q_{\mathrm{co}}(\Theta)$ *имеет место следующее соотношение:*

$$\mu_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\widetilde{\omega}, v) = \chi_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\omega, P), \qquad \operatorname{core} v = \operatorname{co} P.$$

Теорема 10. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ $\Pi_{13}(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) = \mu_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times Q_{\mathrm{co}}(\Theta)) = \chi'_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx} \times P_1(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}) = \Pi_{12}(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) = \Pi_{22}(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$ *и при этом для любых* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X/\overset{\mathrm{ma}}{\approx}$, *для любых* $\omega \in \widetilde{\omega}$, *для любых* $v \in Q_{\mathrm{co}}$ *и для любых* $P \in P_1(\Theta)$ *имеет место соотношение* $\mu_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\widetilde{\omega}, v) = \chi_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\omega, P)$, $\operatorname{core} v = \operatorname{co} P$.

Теорема 11. *Для определяющей ССЗР* $Z = (Y,\Theta,U,g)$ *класса* $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$ *следующие условия эквивалентны:*

функции полезности $W_1(u) = \min\limits_{p\in P} \int\limits_{\Theta} \omega_1(g(\theta,u))p(d\theta)$ *и* $W_2(u) = \int\limits_{\Theta} \omega_2(g(\theta,u))dv$, *где* $P \in P(\Theta)$, $v \in Q(\Theta)$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^X$, $\omega \in U$ *определяют одно и то же отношение предпочтений на* U *(значит и на* Y*);*

$W_1(u) = W_2(u)\ \forall\, u \in U$*;*

емкость v-выпуклая (т. е. $v \in Q_{\text{co}}(\Theta)$), $w_1(x) = w_2(x)\ \forall\, x \in X$, $\operatorname{co} P = \operatorname{core} v$;

статистическая закономерность P-емкая (т. е. $P \in P_1(\Theta)$), $w_1(x) = w_2(x)\ \forall\, x \in X$, $\operatorname{co} P = \operatorname{core} v$;

ПВП для ССЗР класса Пр $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ ($\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$) принадлежит классу Π_{22}(Пр $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$) ($\Pi_{22}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$).

Кроме того, при этих условиях эквивалентны следующие предложения:

емкость v-аддитивна;

$\operatorname{card} P = 1$;

ПВП для ССЗР класса Пр $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ ($\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$) принадлежит классу Π_1(Пр $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$) ($\Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$).

Доказательства сформулированных теорем представлены в работе автора [7].

Таким образом, условия Y3.2 (независимости от определенности), Y3.4 (независимости эквивалентных решений от самих себя) являются необходимыми и достаточными для замены критерия, представляющего собой ожидаемую полезность по неаддитивной мере (см. [4]), на критерий, представляющий собой минимум ожидаемой полезности по статистической закономерности (см. [5, 6]). При этом условие Y3.4 является некоторой формой принципа гарантированного результата (см. [1, 2, 5, 6]) или условием непринятия неопределенности (uncertainty aversion) (см. [3, 4]). А условие Y3.1 (комонотонной независимости) является необходимым и достаточным для взаимной замены критериев, один из которых представляет собой минимум ожидаемой полезности по статистической закономерности, на другой критерий, представляющий собой ожидаемую полезность по неаддитивной мере.

Кроме того, в случае возможности такой замены, что равносильно требованию условий Y3.1, Y3.2, Y3.4 или условий Y3.1, Y3.3 (независимость от худшего), условие Y3 (независимости) является необходимым и достаточным для того, чтобы статистическая закономерность P состояла из одного элемента (это равносильно аддитивности емкости v).

1. *Иваненко В. И., Лабковский В. А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. – Киев: Наук. думка, 1990. – 135 с.
2. *Ivanenko V. I.* Decision systems and non-stochastic randomness. – Berlin: Springer, 2010. – 267 p.
3. *Schmeidler D.* Subjective probability and expected utility without additivity. – IMA Preprint Series, University of Minnesota, 1984.
4. *Schmeidler D.* Subjective probability and expected utility without additivity // Econometrica. – 1989. – **57**. – P. 571–587.
5. *Михалевич В. М.* Одна форма принципа гарантированного результата при многократном выборе // Кибернетика и вычислит. техника. – 2010. – **161**. – С. 28–34.
6. *Михалевич В. М.* Об одном критерии для необайесовских задач решения // Там же. – 2011. – **163**. – С. 3–22.
7. *Михалевич В. М.* О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 140–154.

НУ “Киево-Могилянская академия”
Поступило в редакцию 03.11.2010

V. M. Mikhalevich

On the modeling of a decision-making system for neo-Bayesian problems

A subject of the decision-making system is modeled to within the information that underlies the choice of a specific solution with the purpose to attain the subjectively best solution.