

Л. В. Мольченко, М. В. Нарольський

**Вплив стороннього струму на деформацію гнучких кільцевих пластин змінної жорсткості в магнітному полі***(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)*

*Розглядається вплив змінного стороннього струму на напружено-деформівний стан гнучкої кільцевої пластини змінної жорсткості. Проводиться аналіз електромагнітних ефектів кільцевої пластини змінної жорсткості за двома напрямками під дією нестационарного магнітного поля в геометрично нелінійній постановці. Наводяться чисельні приклади і графіки, які ілюструють вплив зміни стороннього струму на напружено-деформівний стан кільцевої пластини.*

У сучасній техніці, фізичних та електротехнічних експериментальних установках широко використовуються елементи, які знаходяться в електромагнітних полях різноманітного походження. Дія магнітних полів на металеві тонкостінні елементи зумовлює появу об'ємних електродинамічних сил, які можуть при відповідних параметрах полів викликати великі деформації конструкцій. Із застосуванням інноваційних технологічних процесів створені матеріали з новими електромагнітними властивостями. Ці матеріали ефективно використовуються у різних галузях, експлуатація яких пов'язана з навантаженнями в умовах взаємодії електромагнітних і механічних полів. В зв'язку з цим особливу увагу викликають задачі механіки взаємодії електромагнітних полів з тонкими пружними тілами. Зокрема задачі взаємодії електромагнітного поля з струмонесучими тонкими пластинами та оболонками. Вивченню подібних питань були присвячені роботи [1–4].

Часто взаємодія електромагнітного поля з пружною пластиною відбувається при наявності стороннього електричного струму. В цьому випадку отримуємо задачу електромагнітопружності. Задачі, пов'язані з урахуванням стороннього струму, в загальному випадку досить складні, однак вони значно спрощуються для тонких тіл. Ці процеси описуються класом нелінійних крайових задач для тонкостінних пластин. Надалі будемо розглядати деформацію гнучкої кільцевої пластини змінної жорсткості у двох напрямках при дії зовнішнього магнітного поля і стороннього електричного струму.

**Постановка задачі.** В роботі проводиться аналіз впливу стороннього струму на напружено-деформівний стан кільцевої пластини змінної жорсткості.

Розглядається ізотропна пружна пластина в геометрично-нелінійній постановці, виготовлена з матеріалу з скінченною провідністю і яка знаходиться в зовнішньому магнітному полі з заданим вектором напруженості  $\vec{H}_0$ . Крім того, пластина є провідником рівномірно розподіленого стороннього електричного струму густиною  $\vec{J}_{ст}$ .

За координатну площину вибираємо серединну площину, яка віднесена до полярної системи координат  $r, \theta$ . Координата  $\gamma$  відраховується по нормалі до серединної площини. Товщина пластини змінюється за двома напрямками, тобто  $h = h(r, \theta)$ .

Вибираємо за розв'язуючі функції  $u, v, w, \vartheta_r, N_r, S, M_r, \hat{Q}_r, E_\theta, B_\gamma$  в якості шуканих. Після відповідних перетворень, враховуючи, що для пластини кривизни дорівнюють ну-

лю, із загальних рівнянь для оболонок [5, 6] отримуємо розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами у вигляді [7, 8]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} N_r - \frac{\nu}{r} u - \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\nu}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \vartheta_r^2, \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v + \frac{2(1+\nu)}{Eh} S + \frac{1}{r} \vartheta_r \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\vartheta_r, \\
\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_r + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r} \vartheta_r, \\
\frac{\partial N_r}{\partial r} &= -\frac{1-\nu}{r} N_r + \frac{Eh}{r^2} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} - (P_r + \rho F_r^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial S}{\partial r} &= -\frac{\nu}{r} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} S - \frac{E}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \\
&\quad - \frac{Eh}{r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - (P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \widehat{Q}_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \widehat{Q}_r - \frac{Eh^2}{2(1+\nu)r^3} \left[ 0,5 \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{h}{6} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 M_r}{\partial \theta^2} - \frac{Eh}{2r^3} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \vartheta_r \right) - \\
&\quad - \frac{Eh^2}{2r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} \right) - \frac{Eh^3}{12r^3} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\
&\quad - \frac{E}{r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{Eh}{r^3} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\
&\quad - \frac{\nu}{r^2} N_r \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{Eh}{r^3} \left[ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \vartheta_r + S \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} \right) - \\
&\quad - (P_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_r}{\partial r} &= -\frac{1-\nu}{r} M_r - \frac{Eh^2}{4(1+\nu)r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \\
&\quad - \frac{Eh^3}{12(1+\nu)r^2} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{Eh^3}{12r^2} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \vartheta_r \right) + \widehat{Q}_r + N_r \vartheta_r - \frac{1}{r} S \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial E_\theta}{\partial r} &= -\frac{1}{r} E_\theta - \frac{\partial B_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \theta} B_\gamma + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \\
&\quad + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{\sigma \mu r^2} \frac{\partial^2 B_\gamma}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\mu \sigma r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{h^2} \right), \\
\frac{\partial B_\gamma}{\partial r} &= -\sigma \mu E_\theta + \sigma \mu \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) \right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h},
\end{aligned} \tag{1}$$

де  $N_r$  — зусилля стиску — розтягу;  $S$  — зсувне зусилля;  $\widehat{Q}_r$  — узагальнене поперечне зусилля;  $M_r$  — згинаючий момент;  $u, v, w$  — компоненти переміщень;  $E_\theta$  — колова складова напруженості електричного поля;  $B_\gamma$  — нормальна складова магнітної індукції;  $B_r^\pm, B_\theta^\pm$  — відомі складові магнітної індукції на поверхні оболонки;  $\sigma$  — електрична провідність;  $\mu$  — магнітна проникність;  $h = h(r, \theta)$  — товщина пластини;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона.

Компоненти сили Лоренца задаються співвідношеннями [5]:

$$\begin{aligned} \rho F_r^\wedge &= h J_{(\theta)ст} B_\gamma + \sigma h E_\theta B_\gamma + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_r^+ + B_r^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_r^+ - B_r^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] \right\}, \\ \rho F_\theta^\wedge &= -h J_{(r)ст} B_\gamma - \frac{h}{r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} B_\gamma + \sigma h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_r^+ + B_r^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{12} (B_r^+ - B_r^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] - \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{\mu} B_\gamma, \\ \rho F_\gamma^\wedge &= 0,5h \left[ J_{(r)ст} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - J_{(\theta)ст} (B_r^+ + B_r^-) \right] + \frac{h}{2r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \\ &\quad - 0,5\sigma E_\theta (B_r^+ + B_r^-) + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_\gamma - \frac{\partial w}{\partial t} [0,25 (B_r^+ + B_r^-)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_r^+ - B_r^-)^2] \right\} + \frac{B_\theta^{+2} - B_\theta^{-2}}{\mu}. \end{aligned} \quad (2)$$

У векторному вигляді система (1) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial r} = \vec{F} \left( r, \theta, t, \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right). \quad (3)$$

Додаючи до системи диференціальних рівнянь (3) початкові

$$\vec{N} = 0, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (4)$$

та граничні умови

$$B_1 \vec{N}(r_0, t) = \vec{b}_1, \quad B_2 \vec{N}(r_N, t) = \vec{b}_2, \quad (5)$$

отримуємо крайову задачу для гнучких ізотропних круглих пластин змінної жорсткості в магнітному полі, де  $\vec{N} = \{u, v, w, \vartheta_r, S, N_r, \widehat{Q}_r, M_r, E_\theta, B_\gamma\}^T$ ;  $\vec{F}$  — нелінійна вектор-функція;  $B_1, B_2$  — прямокутні матриці;  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  — відомі вектори.

В подальшому крайова задача (3)–(5) розв’язується чисельно, згідно з методикою, стисло описаною нижче та в роботі [9]. Розв’язок крайових задач магнітопружності пов’язаний із значними обчислювальними труднощами. Це пояснюється тим, що розв’язуюча система рівнянь є системою диференціальних рівнянь в частинних похідних десятого порядку зі змінними коефіцієнтами.

**Методика розв’язання.** Методика розв’язання задач магнітопружності кільцевих пластин змінної жорсткості базується на послідовному застосуванні схеми Ньюмарка, методу прямих, методу квазілінеаризації та методу дискретної ортогоналізації.

Для розділення змінних за часовою координатою застосовується неявна схема Ньюмарка інтегрування рівнянь магнітопружності. Співвідношення кроків різницевої схеми за часом і просторовою координатою зумовлюється критерієм Куранта. Отриману двовимірну задачу замінюємо на одновимірну за допомогою методу прямих на кожному часовому кроці схеми Ньюмарка. Подальше застосування методу квазілінеаризації зводить нелінійну крайову задачу до послідовності лінійних крайових задач. На першому за часом кроці за початкове наближення в ітераційному процесі вибирається розв’язок лінеаризованої крайової задачі. На наступних кроках — за початковий вибирається розв’язок, одержаний на попередньому кроці, що є розв’язком вже нелінійної задачі. Вибір такої схеми істотно зменшує кількість ітерацій, необхідних для розв’язання задачі. Потім кожна з лінійних крайових задач послідовності на відповідному часовому кроці розв’язується чисельно за допомогою методу дискретної ортогоналізації [10].

**Чисельні результати.** Розглянемо задачу про деформівний стан гнучкої алюмінієвої кільцевої пластини з внутрішнім радіусом  $r_0$  та зовнішнім  $r_1$ , товщина якої змінюється у двох координатних напрямках за законом

$$h = h_0(1 + \alpha \cos \theta) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{r_1}\right),$$

під дією нормального навантаження

$$P_\gamma = P_0 \sin \omega t,$$

в поперечному магнітному полі  $H_{\gamma 0}$ . Також до пластини підводиться сторонній струм

$$J_{(r,\theta)ст} = J_0 \sin \omega t.$$

Контури пластини задовольняють такі граничні умови:

$$u = v = 0, \quad \widehat{Q}_r = 0, \quad M_r = 0, \quad B_\gamma = B_{\gamma 0} \sin \omega t \quad \text{при} \quad r = r_0,$$

$$u = v = w = 0, \quad M_r = 0, \quad B_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1.$$

Параметри пластини і матеріалу вибираємо такі:

$$h_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad r_0 = 0,49 \text{ м}, \quad r_1 = 0,86 \text{ м}, \quad E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$\nu = 0,34, \quad \sigma = 3,63 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}, \quad \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м},$$

$$\omega = 314,16 \text{ с}^{-1}, \quad \rho = 2670,3 \text{ кг/м}^3.$$

Розв’язок задачі визначався на інтервалі часу  $\tau = 10^{-2}$  с, крок інтегрування за часом вибирався рівним  $\Delta t = 10^{-3}$  с. Внаслідок симетрії по  $\theta$  навантажень і товщини пластини задача розв’язувалася на інтервалі  $[0, \pi]$ .

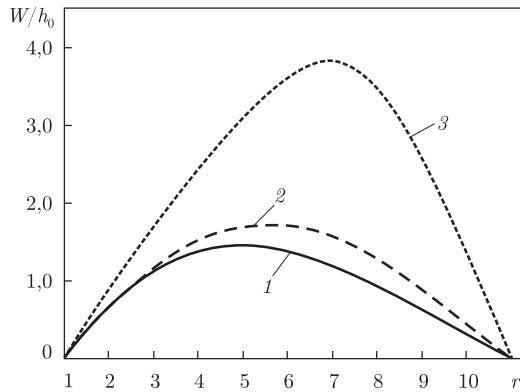


Рис. 1

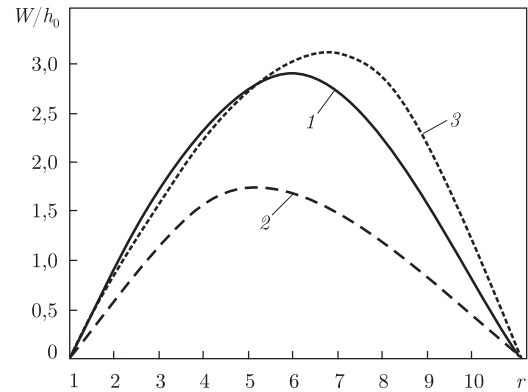


Рис. 2

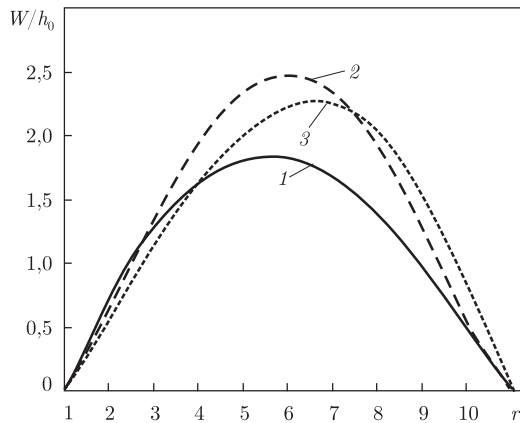


Рис. 3

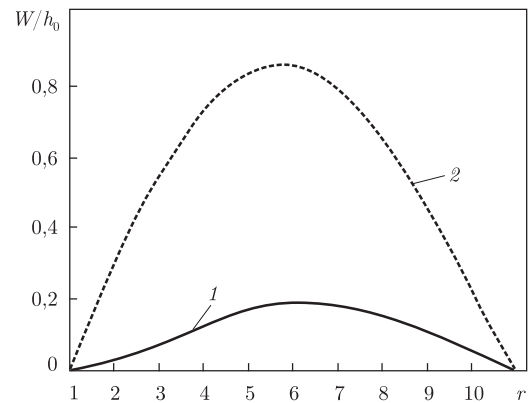


Рис. 4

Вважається також, що сторонній електричний струм у незбуреному стані рівномірно розподілений по пластині (густина струму не залежить від координат) і має напрямок, паралельний серединній площині пластини.

На рис. 1 та 2 показано розподіл прогину  $W/h_0$  при  $t = 0,01$  с для  $J_{(\theta)ст} = 2,98 \cdot 10^5 \sin \omega t$  і  $J_{(\theta)ст} = -3,06 \cdot 10^6 \sin \omega t$  відповідно,  $J_{(r)ст} = 0$ ,  $P_0 = 200$  Н/м<sup>2</sup>,  $B_{\gamma_0} = 0,1$  Тл. Лінії 1–3 відповідають значенням колової координати  $\theta = 0; \pi/2; \pi$ . Крок за радіальною координатою  $\Delta r = 0,037$  м.

Згідно з результатами, наведеними на рис. 1, максимальний безрозмірний прогин пластини для колової координати  $\theta = \pi$  досягає значень  $W/h_0 = 3,8$  та  $W/h_0 = 3$  на рис. 2. При значенні  $\theta = \pi/2$  прогин на рис. 1, 2 змінюється приблизно однаково. При  $\theta = 0$ , у відповідності з результатами, наведеними на рис. 1, прогин майже мінімальний, на рис. 2 — прогин істотно нелінійний. Виходячи з цих результатів, можемо оцінити вплив колової складової стороннього струму при протилежних її напрямках.

На рис. 3 та 4 показано розподіл прогину  $W/h_0$  при  $t = 0,01$  с для  $J_{(r)ст} = 2,50 \cdot 10^2 \sin \omega t$  і  $J_{(r)ст} = -3,47 \cdot 10^3 \sin \omega t$  відповідно,  $J_{(\theta)ст} = 0$ , при попередніх значеннях параметрів навантаження. Лінії 1–3 відповідають значенням колової координати  $\theta = 0; \pi/2; \pi$ . Крок за радіальною координатою  $\Delta r = 0,037$  м.

Результати максимальних безрозмірних величин прогину при дії на пластину радіальної складової стороннього струму наведені на рис 3, 4. На рис. 3 результати є нелінійними для

всіх розглянутих значень колової координати, на рис. 4 при протилежному максимальному значенні радіального стороннього струму прогин пластини лінійний. Тобто при додатному напрямку стороннього струму складові сили Лоренца, залежні від стороннього струму і магнітного поля, набувають однакових знаків. У випадку протилежного напрямку стороннього струму вони мають протилежні знаки.

Таким чином, у роботі розглянуто вплив змінного стороннього струму на напружено-деформівний стан гнучкої кільцевої пластини змінної жорсткості під дією нестационарного магнітного поля. Проведено аналіз електромагнітних ефектів кільцевої пластини змінної жорсткості за двома напрямками під дією нестационарного магнітного поля в геометрично нелінійній постановці. Наведено чисельні приклади і графіки для кільцевої пластини, які ілюструють вплив стороннього струму на напружено-деформівний стан та підтверджують застосовність описаного методу до розв'язання задач такого типу.

1. Улітко А. Ф., Мольченко Л. В., Ковальчук В. Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. – Київ: Либідь, 1994. – 155 с.
2. Maugin G. A. On modelling electromagnetomechanical interactions in deformable solids // Int. J. of Adv. in Eng. Sci. and Appl. Math. – 2009. – 1, No 1. – P. 25–32.
3. Moon F. C. Magneto-solid mechanics. – New York: Wiley, 1984. – 437 p.
4. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – Москва: Наука, 1977. – 272 с.
5. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності. – Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2010. – 403 с.
6. Green A. E., Naghdi P. M. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1983. – A309. – P. 559–610.
7. Мольченко Л. В., Лоос И. И., Индиаминов Р. Ш. Напряженно-деформированное состояние гибких кольцевых пластин переменной жесткости в магнитном поле // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 11. – С. 106–114.
8. Molchenko L. V., Dikii P. V. Two-dimensional magnetoelastic solutions for an circular plate // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, No 11. – P. 1328–1334.
9. Мольченко Л. В. Методика решения двумерных нелинейных краевых задач магнитоупругости тонких оболочек // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 5. – С. 32–39.
10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1963. – 16, вып. 3(99). – С. 171–174.

Київський національний університет  
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 28.10.2010

L. V. Molchenko, M. V. Narolskyi

### **Influence of extraneous current on the deformation of flexible annular plates of variable stiffness in magnetic field**

*The influence of an alternating extraneous current on a stress-strain state of flexible annular plates of variable stiffness is considered. The electromagnetic effects in the annular plate of variable stiffness in two directions under the influence of a non-stationary magnetic field in the geometrically nonlinear formulation are analyzed. Numerical examples and graphics illustrate the effect of changing the extraneous current on the stress-strain state of a circular plate.*