УДК 517.5



**Р. Р. Салимов**

# Локальное поведение обобщенных квазиизометрий

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)*

*Досліджено кільцеві $Q$-гомеоморфізми відносно $p$-модуля. Встановлено критерій належності цьому класу. Отримано оцінку міри образу кулі при таких відображеннях і досліджено асимптотичну поведінку в нулі. Доведено, що скінченно біліпшицеві гомеоморфізми є кільцевими $Q$-гомеоморфізмами відносно $p$-модуля. Це дає можливість описати асимптотичну поведінку в нулі скінченно біліпшицевих відображень, які є узагальненням ізометрій та квазіізометрій.*

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых $\Gamma$ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho ds \geqslant 1 \tag{1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда *$p$-модуль* семейства кривых $\Gamma$ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\, dm(x). \tag{2}$$

Здесь $m$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений по Ю. Вяйсяля (см. [1]), заданных в области $G$ из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, положено условие

$$M_n(f\Gamma) \leqslant K M_n(\Gamma) \tag{3}$$

для произвольного семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в области $G$.

Целью данной работы является получение на основе используемой нами техники исследования аналога следующего результата из работы [2] для более общих классов.

*Предположим, что $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^3$ — $K$-квазиконформное отображение такое, что $f(0) = 0$. Тогда*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\gamma}} \leqslant 1,$$

*где $\gamma$ — постоянная, зависящая только от коэффициента квазиконформности $K$.*

Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в $D$ частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ — якобиева матрица отображения $f$ в точке $x$, $|f'(x)| = \max\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} (|f'(x)h|/|h|)$. *Внешняя дилатация* отображения $f$ в точке $x$ есть величина

$$K_O(x,f) = \frac{|f'(x)|^n}{|J(x,f)|},$$

если $J(x,f) \neq 0$, $K_O(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x,f) = \infty$ в остальных точках.

$K_I(x, f)$ — *внутренняя дилатация* $f$,

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если *якобиан* $J(x, f) := \det f'(x) \neq 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$. В формуле выше, как обычно,

$$l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

*Угловой дилатацией* отображения $f$ в точке $x \in G$ относительно $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется функция

$$D_f(x, x_0) = \frac{J(x, f)}{l_f^n(x, x_0)}, \tag{4}$$

где

$$l_f(x, x_0) = \min_{|h|=1} \frac{|\partial_h f(x)|}{\left|\left\langle h, \dfrac{x - x_0}{|x - x_0|} \right\rangle\right|}.$$

Здесь $\partial_h f(x)$ обозначает производную отображения $f$ в точке $x$ по направлению $h$. Впервые многомерный аналог угловой дилатации в случае $p = n$ встречается в работе [3] для исследования пространственных квазиконформных отображений.

**1. Об одном новом классе отображений.** Пусть $G$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q\colon G \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ будем называть *$Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля*, если

$$M_p(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \varrho^p(x)\, dm(x) \tag{5}$$

для любого семейства $\Gamma$ путей в $G$ и любой допустимой функции $\varrho$ для $\Gamma$.

Определение $Q$-гомеоморфизма относительно $p$-модуля впервые встречается в работе [4]. Такие отображения являются естественным обобщением квазиконформных и квазиизометрических отображений. Заметим, что если $Q(x) \leqslant K$ почти всюду при $p = n$, отображение $f$ $K$-квазиконформно (см. напр., [1]) и $K$-квазиизометрично в случае $1 < p \neq n$ (см. [5]). Целью теории $Q$-гомеоморфизмов является установление взаимосвязей между различными свойствами мажоранты $Q$ и самого отображения $f$. Неравенство вида (5) при $p = n$ установлено В. Я. Гутлянским совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Вуориненом в работе [6] для квазиконформных отображений, где $Q$ было равно $K_I(x, f)$. Последнее обстоятельство, собственно, и положило начало рассмотрению семейств отображений, удовлетворяющих упомянутому выше соотношению. Отметим также, что неравенство вида (5) было установлено Ю. Ф. Струговым в работе [7] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем. При $p = n$ проблема локального поведения $Q$-гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in \mathrm{BMO}$ (ограниченного среднего колебания), в случае $Q \in \mathrm{FMO}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях (см. [8]).

Напомним следующие термины. Пусть $E$, $F \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F, G)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют $E$ и $F$ в $G$, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Пусть $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$ и пусть $Q\colon G \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \tag{6}$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r_i\}, \qquad i = 1, 2. \tag{7}$$

Согласно работе Геринга [9] для квазиконформности отображений достаточно требовать, чтобы условие вида (3) было выполнено для семейств кривых, соединяющих граничные компоненты произвольного сферического кольца из области $G$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в точке* $x_0 \in G$ $(1 < p \leqslant n)$, если соотношение

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fG)) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{8}$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{9}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в области* $G$, если условие (8) выполнено для всех точек $x_0 \in G$.

В работе [10] впервые на плоскости было установлено неравенство вида (8) при $p = 2$ для квазиконформных отображений с $Q(z)$, равным так называемой угловой дилатации $D_f(z, z_0)$, которая совпадает с (4), а затем в случае $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с $Q(x) = D_f(x, x_0)$ при $p = n$ в работе [3]. Понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма относительно $p$-модуля при $p = 2$ было впервые введено и использовалось для изучения вырожденных уравнений Бельтрами в работе [11].

Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля, который ранее был также установлен в работе [12] при $p = n$ (см. также [8]).

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q\colon G \to [0, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f\colon G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$*

$$M_p(\Gamma(fS_1, fS_2)) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{10}$$

*где $S_1$ и $S_2$ — сферы $|x - x_0| = r_1$ и $|x - x_0| = r_2$, $\omega_{n-1}$ — площадь единичной сферы $S^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $I = I(x_0, r_1, r_2) = \displaystyle\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(r)}$, $q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q$ над* *сферой* $|x - x_0| = r$. *При этом инфимум в выражении справа в* (8) *достигается только для функции*

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(r)}. \tag{11}$$

**2. Искажение объема.** В следующей лемме получена оценка меры образа шара при кольцевых $Q$-гомеоморфизмах относительно $p$-модуля. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в работе М. А. Лаврентьева [13].

**Лемма 1.** *Пусть* $n \geqslant 2$, $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — *кольцевой* $Q$-*гомеоморфизм относительно* $p$-*модуля,* $f(0) = 0$. *Тогда при* $1 < p < n$ *имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \cdot \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{n(p-1)/(p-n)}, \tag{12}$$

*а при* $p = n$ *имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \cdot \exp\left\{-n \int\limits_r^1 \frac{dt}{t q^{1/(n-1)}(t)}\right\}, \tag{13}$$

*где* $q(t)$ — *среднее значение* $Q(x)$ *над сферой* $|x| = t$.

**3. Поведение в точке.** Лемма 1 позволяет нам также описать асимптотическое поведение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля в нуле.

**Теорема 2.** *Пусть* $n \geqslant 2$, $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — *кольцевой* $Q$-*гомеоморфизм относительно* $p$-*модуля,* $f(0) = 0$. *Тогда при* $1 < p < n$ *имеет место оценка*

$$\liminf_{x \to 0} |f(x)| \cdot \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(n-p)} \leqslant 1, \tag{14}$$

*а при* $p = n$ *имеет место оценка*

$$\liminf_{x \to 0} |f(x)| \cdot \exp\left\{\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{t q^{1/(n-1)}(t)}\right\} \leqslant 1, \tag{15}$$

*где* $q(t)$ — *среднее значение* $Q(x)$ *над сферой* $S(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = t\}$.

**4. Следствия для конечно билипшицевых отображений.** Пусть гомеоморфизм $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, положим

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \tag{16}$$

и

$$l(x, f) = \liminf_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}. \tag{17}$$

Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ является *конечно билипшицевым*, если

$$0 < l(x,f) \leqslant L(x,f) < \infty \tag{18}$$

для всех $x\in G$.

*Угловой $p$-дилатацией* отображения $f$ в точке $x\in G$ относительно $x_0\in\mathbb{R}^n$ называется следующая функция:

$$D_{f,p}(x,x_0)=\frac{J(x,f)}{l_f^p(x,x_0)}, \tag{19}$$

если *якобиан* $J(x,f):=\det f'(x)\neq 0$, $D_{f,p}(x,x_0)=1$, если $f'(x)=0$, и $D_{f,p}(x,x_0)=\infty$ в остальных точках.

В формуле (19)

$$l_f(x,x_0)=\min_{|h|=1}\frac{|\partial_h f(x)|}{\left|\left\langle h,\dfrac{x-x_0}{|x-x_0|}\right\rangle\right|},$$

где $\partial_h f(x)$ — производная отображения $f$ в точке $x$ по направлению $h$.

Можно доказать следующее утверждение, которое ранее было доказано для квазиконформных отображений в случае $p=n$ с $Q(x)=D_{f,n}(x,x_0)$ (см. [3]).

**Лемма 2.** *Любой конечно билипшицевый гомеоморфизм является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля, $1<p\leqslant n$ с $Q(x)=D_{f,p}(x,x_0)$.*

Это позволяет сформулировать следствие теоремы 2 для конечно билипшицевых отображений, которые являются далеко идущим обобщением изометрий и квазиизометрий.

**Теорема 3.** *Пусть $n\geqslant 2$, $f\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ — конечно билипшицевый гомеоморфизм, $f(0)=$ $=0$. Тогда при $1<p<n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0}|f(x)|\cdot\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(n-p)}\leqslant 1, \tag{20}$$

*а при $p=n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0}|f(x)|\cdot\exp\left\{\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)}\right\}\leqslant 1, \tag{21}$$

*где $q(t)$ — среднее значение $Q(x)=D_{f,p}(x,x_0)$ над сферой $S(t)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon|x|=t\}$.*

Как легко видеть, при $p\to n$ (20) переходит в (21).


1. *Väisälä J.* Lectures on $n$-dimensional quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. Vol. 229. – Berlin: Springer, 1971. – 229 p.
2. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175–203.
3. *Gutlyanskii V. Ya., Golberg A.* On Lipschitz continuity of quasiconformalmappings in space // J. d'Anal. Math. – 2009. – **109**, No 1. – P. 233–251.
4. *Golberg A.* Differential properties of $(\alpha,Q)$-homeomorphisms // Further Progress in Analysis. – Singapure: World Scientific Publ., 2009. – P. 218–228.

5. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in $n$-space [Advances in the theory of Riemann surfaces, Proc. Conf. Stonybrook, N. Y., 1969] // Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175–193.
6. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
7. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859–861.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
9. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
10. *Gutlyanski V., Martio O., Sugava T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – **357**, No 3. – P. 875–900.
11. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.
12. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q$-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361–1376.
13. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 136 с.

*Институт прикладной математики*
*и механики НАН Украины, Донецк*

*Поступило в редакцию 23.09.2010*

**R. R. Salimov**

## The local behavior of generalized quasiisometries

*We consider the ring $Q$-homeomorphisms with respect to the $p$-modulus and establish a belonging criterion for this class. We obtain a measure estimate for the image of a ball and investigate the asymptotic behavior at zero under such mappings. It is shown that the finitely bi-Lipschitz homeomorphisms are ring $Q$-homeomorphisms with respect to the $p$-modulus. This makes it possible to describe the asymptotic behavior of finitely bi-Lipschitz at zero maps which are a far-reaching generalization of isometries and quasiisometries.*