ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2011

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 536.12:620.198

В. А. Шевчук

До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Р. М. Кушніром)

Запропоновано підхід до побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття, який грунтується на розвиненні функції температури за товщиною покриття у ряд Тейлора. Отримано розрахункові варіанти узагальнених граничних умов з різною точністю. Також виведено формули відновлення для розподілу температури за товщиною покриття через граничні значення температури та її похідної.

Питання побудови узагальнених граничних умов (УГУ) теплообміну тіл із середовищем через тонкі покриття привертають увагу широкого кола дослідників [1–11]. При виведенні таких УГУ для випадку неплоских покриттів використовується або апріорне допущення про постійний [10] чи лінійний [8] розподіл температури за товщиною покриття, або наближене рівняння теплопровідності тонких оболонок [12, 13], як у роботах [3, 5–7, 11],

$$\Delta t + \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + 2k\frac{\partial t}{\partial \gamma} = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau}, \tag{1}$$

$$\Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\right], \tag{2}$$

де t — температура покриття; α, β, γ — криволінійні ортогональні координати; τ — час; $k = (k_1 + k_2)/2$; A, B — коефіцієнти першої квадратичної форми; k_1, k_2 — головні кривини базисної поверхні оболонки; a — коефіцієнт температуропровідності матеріалу покриття.

Використання наближеного рівняння (1) дає можливість отримати наближені УГУ лише з точністю до доданків, які включають лінійні члени за товщиною покриття.

У цій роботі пропонується підхід, який дає можливість будувати УГУ з довільною точністю.

Постановка задачі. Як вихідне візьмемо таке рівняння тривимірної задачі теплопровідності для ізотропного покриття [14, 15]:

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{1+k_2\gamma}{1+k_1\gamma}\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{1+k_1\gamma}{1+k_2\gamma}\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)\frac{\partial t}{\partial\gamma}\right]=$$
$$=\frac{(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)}{a}\frac{\partial t}{\partial\tau}. \tag{3}$$

Вважаємо, що на границі покриття — середовище має місце конвективний теплообмін за законом Ньютона

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial\gamma}=\mu(t_{\text{с}}-t) \qquad \text{при} \qquad \gamma=\delta, \tag{4}$$

між покриттям і тілом виконуються умови ідеального теплового контакту

$$t=t_{\text{т}}, \qquad \lambda\frac{\partial t}{\partial\gamma}=\lambda_{\text{т}}\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial\gamma} \qquad \text{при} \qquad \gamma=0, \tag{5}$$

а початкова умова така:

$$t|_{\tau=0}=t_0(\alpha,\beta,\gamma). \tag{6}$$

Тут $t_{\text{т}}$, $t_{\text{с}}$ — температура тіла та середовища, відповідно; δ — товщина покриття; λ, $\lambda_{\text{т}}$ — коефіцієнти теплопровідності покриття та тіла; μ — коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття.

Побудова УГУ. Запишемо розвинення температури у покритті в ряд Тейлора в околі $\gamma = 0$:

$$t(\gamma)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}t^{(m)}(0). \tag{7}$$

Підставляючи (7) в (5), отримаємо

$$t(0)=t_{\text{т}}|_{\gamma=0}, \qquad t'(0)=\frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda}\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=0}. \tag{8}$$

Підстановка (7) в (3) з урахуванням формул

$$\frac{1+k_i\gamma}{1+k_{3-i}\gamma}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m(-1)^m k_{3-i}^{m-1}(k_{3-i}-k_i) \qquad i=1,2;$$

$$\frac{1}{(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m k_{(m)}\gamma^m,$$

$$\frac{1+(k_1k_2/k)\gamma}{(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(k_{(m)}-\frac{k_1k_2}{k}k_{(m-1)}\right)\gamma^m$$

дає

$$\sum_{m=0}^{\infty}\gamma^m\sum_{i=0}^{m}k_{(m-i)}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{m-j}}{j!}\Delta_{i-j}t^{(j)}(0)+2k\Bigg[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}t^{(m+1)}(0)+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-i}}{i!}\left(k_{(m-i)}-\frac{k_1k_2}{k}k_{(m-i-1)}\right)t^{(i+1)}(0)\Bigg]+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}t^{(m+2)}(0)=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}t^{(m)}(0),\qquad 0<\gamma<\delta. \tag{9}$$

Тут введено позначення $k_{(m)}=\sum\limits_{j=0}^{m}k_1^{m-j}k_2^{j}$,

$$\Delta_j=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}k_1^{j-1}(k_1-k_2)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}k_2^{j-1}(k_2-k_1)\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right],$$
$$j=1,2,\ldots;\qquad \Delta_0=\Delta.$$

З формули (9), прирівнюючи члени при однакових степенях γ, отримаємо такі співвідношення:

$$\Delta_0t(0)+2kt'(0)+t''(0)=\frac{1}{a}\frac{\partial t(0)}{\partial\tau},$$
$$-(2k\Delta_0+\Delta_1)t(0)+(\Delta_0-4k^2+2k_1k_2)t'(0)+2kt''(0)+t'''(0)=\frac{1}{a}\frac{\partial t'(0)}{\partial\tau},$$
$$n!\sum_{i=0}^{n}k_{(n-i)}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{n-j}}{j!}\Delta_{i-j}t^{(j)}(0)+$$
$$+2k\left[t^{(n+1)}(0)+n!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-i}}{i!}\left(k_{(n-i)}-\frac{k_1k_2}{k}k_{(n-i-1)}\right)t^{(i+1)}(0)\right]+ \tag{10}$$
$$+t^{(n+2)}(0)=\frac{1}{a}\frac{\partial t^{(n)}(0)}{\partial\tau},\qquad n\geqslant 2.$$

З (10) випливає

$$t''(0)=-2kt'(0)-\Delta_0t(0)+\frac{1}{a}\frac{\partial t(0)}{\partial\tau},$$
$$t^{(n)}(0)=-2kt^{(n-1)}(0)-(n-2)!\sum_{i=0}^{n-2}k_{(n-i-2)}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{n-j}}{j!}\Delta_{i-j}t^{(j)}(0)-$$
$$-2k(n-2)!\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(-1)^{n-i}}{i!}\left(k_{(n-i-2)}-\frac{k_1k_2}{k}k_{(n-i-3)}\right)t^{(i+1)}(0)+\frac{1}{a}\frac{\partial t^{(n-2)}(0)}{\partial\tau}, \tag{11}$$
$$n\geqslant 3.$$

З формул (8) і (11) одержуємо зображення для похідної n-го порядку функції температури покриття на поверхні розділу тіло — покриття через граничні значення температури тіла та її похідної:

$$t^{(n)}(0) = c_n t_{\text{т}}|_{\gamma=0} + d_n \frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial \gamma}\bigg|_{\gamma=0}, \tag{12}$$

де коефіцієнти c_n, d_n визначаються за рекурентними співвідношеннями

$$c_0 = 1, \qquad d_0 = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad d_1 = \frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda}, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
\varphi_2 = -2k\varphi_1 - \Delta_0\varphi_0 + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_0,\\
\varphi_n = -2k\varphi_{n-1} - (n-2)!\sum_{i=0}^{n-2} k_{(n-i-2)} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{n-j}}{j!}\Delta_{i-j}\varphi_j - \\
- 2k(n-2)!\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(-1)^{n-i}}{i!}\left(k_{(n-i-2)} - \frac{k_1k_2}{k}k_{(n-i-3)}\right)\varphi_{i+1} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_{n-2},\\
\varphi = c, d; \qquad n \geqslant 3.
\end{gathered} \tag{14}$$

Підстановка виразу (12) у розвинення (7) приводить до такого зображення температури у покритті:

$$t(\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}\left(c_m t_{\text{т}}|_{\gamma=0} + d_m \frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=0}\right). \tag{15}$$

Підставляючи розклад (15) в граничну умову (4) і враховуючи (13), отримуємо при $\gamma = 0$:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta^m}{m!}(\lambda c_{m+1} + \mu c_m)t_{\text{т}} + \left[\lambda_{\text{т}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta^m}{m!}(\lambda d_{m+1} + \mu d_m)\right]\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial\gamma} - \mu(t_{\text{c}} - t_{\text{т}}) = 0. \tag{16}$$

Оскільки співвідношення (16) пов'язує граничні значення температури $t_{\text{т}}$ та її похідної $\partial t_{\text{т}}/\partial\gamma$ у тілі із значенням температури t_{c} в середовищі, то його можна трактувати як узагальнену граничну умову для визначення температури в тілі, яка враховує вплив покриття на перебіг процесу теплопереносу в тілі.

Розрахункові варіанти УГУ. Вираз (16) є загальним вихідним співвідношенням для отримання розрахункових варіантів УГУ з різною точністю.

При відкиданні доданків в умові (16), які містять товщину, одержуємо, як частковий випадок, умову теплообміну за Ньютоном

$$\lambda_{\text{т}}\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial\gamma} - \mu(t_{\text{c}} - t_{\text{т}}) = 0. \tag{17}$$

Якщо обмежитися в (16) лише лінійним доданком за товщиною при температурі $t_{\text{т}}$, отримаємо

$$\widetilde{\Delta}t_{\text{т}} - \lambda_{\text{т}}\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial\gamma} + \mu(t_{\text{c}} - t_{\text{т}}) = \Omega\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial\tau}, \tag{18}$$

де $\widetilde{\Delta} = \Lambda\Delta$, а $\Lambda = \lambda\delta$, $\Omega = \lambda\delta/a$ — приведені теплопровідність і теплоємність покриття.

Для одновимірного ($\widetilde{\Delta} = 0$) випадку умова (18) збігається з умовою, одержаною в [10] за схемою "зосередженої ємності".

Якщо залишити в (16) лише лінійні члени при температурі $t_т$ і похідній $\partial t_т/\partial\gamma$, матимемо такий варіант УГУ:

$$\widetilde{\Delta} t_т - \lambda_т\left(1 - 2K + \frac{\mu}{H}\right)\frac{\partial t_т}{\partial\gamma} + \mu(t_с - t_т) = \Omega\frac{\partial t_т}{\partial\tau}. \tag{19}$$

Тут $K = \delta k$ — приведена середня кривина; $H = \lambda/\delta$ — теплопроникність покриття.

Вираз (19) збігається (або еквівалентний за точністю) з відповідними УГУ конвективного теплообміну тіл з покриттями, які були отримані при застосуванні інших підходів у роботах [3, 6, 7, 11] та у [5] при нехтуванні теплообміну випроміненням. Для плоских ($K = 0$) покриттів у випадку одновимірної ($\widetilde{\Delta} = 0$) стаціонарної ($\Omega = 0$) теплопровідності УГУ (19) збігається з ефективною граничною умовою в [2].

Якщо залишити в (16) лінійні члени при температурі $t_т$ і квадратичні члени при похідній $\partial t_т/\partial\gamma$, отримаємо такий варіант УГУ:

$$\widetilde{\Delta}\left[t_т + \frac{\lambda_т}{2H}\frac{\partial t_т}{\partial\gamma}\right] - \lambda_т\left[1 - 2K(1 - 2K) - K_1K_2 + \frac{\mu}{H}(1 - K)\right]\frac{\partial t_т}{\partial\gamma} +$$
$$+ \mu(t_с - t_т) = \Omega\left[\frac{\partial t_т}{\partial\tau} + \frac{\lambda_т}{2H}\frac{\partial^2 t_т}{\partial\tau\partial\gamma}\right], \tag{20}$$

де $K_1K_2 = \delta k_1\delta k_2$ — приведена гауссова кривина оболонки покриття.

Без урахування в (16) степенів, вищих за квадратичні, отримуємо такий варіант УГУ:

$$\widetilde{\Delta}\left[\left(1 - 2K + \frac{\mu}{2H}\right)t_т + \frac{\lambda_т}{2H}\frac{\partial t_т}{\partial\gamma}\right] - \widetilde{\Delta}_1 t_т -$$
$$-\lambda_т\left[1 - 2K(1 - 2K) - K_1K_2 + \frac{\mu}{H}(1 - K)\right]\frac{\partial t_т}{\partial\gamma} + \mu(t_с - t_т) =$$
$$= \Omega\left[\left(1 - K + \frac{\mu}{2H}\right)\frac{\partial t_т}{\partial\tau} + \frac{\lambda_т}{2H}\frac{\partial^2 t_т}{\partial\tau\partial\gamma}\right], \tag{21}$$

де $\widetilde{\Delta}_1 = 0{,}5\delta\Lambda\Delta_1$.

Відзначимо, що варіант УГУ (21) не збігається з відповідними УГУ в [5, 7], оскільки за вихідне співвідношення там приймається наближене рівняння теплопровідності (1), хоча для часткового випадку плоских покриттів результати збігаються [1, 7].

Слід зауважити, що УГУ (18)–(21) містять похідні за часом від граничної температури $t_т$, а УГУ (20), (21) — ще й від її похідної $\partial t_т/\partial\gamma$. З контактних умов (5) і початкової умови (6) отримаємо

$$t_т|_{\gamma=0,\tau=0} = t_0(\alpha, \beta, 0), \qquad \left.\frac{\partial t_т}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0,\tau=0} = \frac{\lambda}{\lambda_т}\left.\frac{\partial t_0(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0}. \tag{22}$$

Вирази (22) можуть бути використані при застосуванні відповідних УГУ (18)–(21).

Формули відновлення. Формула (15) слугує формулою відновлення для температурного поля в покритті після розв'язування відповідної задачі теплопровідності в області тіла з УГУ.

Для випадку обмеження лінійними членами розкладу в (15) отримуємо

$$t(\gamma) = t_{\text{т}}|_{\gamma=0} + \gamma \frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda} \frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial \gamma}\bigg|_{\gamma=0}, \tag{23}$$

а для випадку обмеження квадратичними членами розкладу в (15) —

$$t(\gamma) = \left(1 + \frac{\gamma^2}{2}\left(-\Delta + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\right) t_{\text{т}}\bigg|_{\gamma=0} + \gamma(1 - k\gamma)\frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda}\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial \gamma}\bigg|_{\gamma=0}. \tag{24}$$

Отже, в роботі наведено підхід до побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття, який грунтується на використанні точного рівняння теплопровідності в покритті і розвинення функції температури за товщиною покриття в ряд Тейлора. Цей підхід дає можливість отримувати розрахункові варіанти узагальнених граничних умов з різною точністю.

1. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепл. напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
2. *Равин В. С.* Об эффективных граничных условиях в задачах стационарной теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 1967. – **13**, № 4. – С. 540–541.
3. *Иващук Д. В.* Исследование теплодиффузионных процессов и напряженного состояния в телах с покрытиями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1978. – 16 с.
4. *Коляно Ю. М.*, *Хомякевич Е. П.* Граничные условия для определения обобщенных динамических температурных напряжений в телах с покрытиями // Термомех. процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 43 – 50.
5. *Шевчук П. Р., Гаврись А. П.* Влияние лучевого нагрева на температурные режимы и остаточные напряжения при высокотемпературном напылении покрытий // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 30. – С. 69–73.
6. *Флейшман Н. П.* Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.
7. *Шевчук В. А.* Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1995. – Вып. 38. – С. 116–120.
8. *Комаров Г. М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності // Доп. НАН України. – 1996. – № 7. – С. 26–31.
9. *Al Nimr M. A., Alcam M. K.* A generalized boundary condition // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1997. – **33**, No 1–2. – P. 157–161.
10. *Аттетков А. В., Беляков Н. С.* Температурное поле неограниченного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с термически тонким покрытием его поверхности // Теплофизика высоких температур. – 2006. – **44**, № 1. – С. 136–140.
11. *Shevchuk V. A.* Modeling and computation of heat transfer in a system “body-multilayer coating” // Heat Transfer Research. – 2006. – **37**, Iss. 5. – P. 412–423.
12. *Мотовиловец И. А.* Теплопроводность пластин и тел вращения. – Киев: Наук. думка, 1969. – 144 с.
13. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
14. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 54–59.
15. *Дяконюк Л. М., Муха І. С., Савула Я. Г.* Моделювання і дослідження тепломасоперенесення у багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 101–107.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 03.02.2011

V. A. Shevchuk

On constructing the generalized boundary conditions of convective heat exchange of bodies with environment via thin nonplanar coatings

An approach to constructing the generalized boundary conditions of convective heat exchange of bodies with the environment via thin nonplanar coatings, which is based on the use of the expansion of a temperature function in a Taylor series in the coating thickess has been suggested. Computational variants of generalized boundary conditions with different accuracies have been obtained. Restoration formulas for the temperature distribution over the coating thickness in terms of boundary values of the temperature and its derivative have also been derived.