УДК 514.764.77

© **2011**

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Борисенко, М. А. Голицына**

О кривизне семейства кривых на плоскости

Доведено, що для послідовності регулярних кривих, яка задовольняє певні умови, довжини яких прямують до нескінченності, максимум кривини також прямує до нескінченності.

Здесь решается задача, поставленная Е. В. Жужомой. Она возникла в теории динамических систем.

Теорема. *Пусть γ_i — последовательность регулярных кривых с концами A_i, B_i, которые лежат на отрезке конечной длины AB и расположены в одной полуплоскости, ограниченной прямой AB. Вместе с отрезками A_iB_i кривые γ_i образуют замкнутые вложенные кривые, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1) области Ω_i, ограниченные этими кривыми, вложены друг в друга: $\Omega_i \leqslant \Omega_{i+1}$;

2) площади $S(\Omega_i)$ областей Ω_i ограничены: $S(\Omega_i) \leqslant M$, где M — постоянная;

3) длины $l(\gamma_i)$ кривых γ_i стремятся к бесконечности.

Тогда найдется последовательность точек X_i на кривых γ_i такая, что кривизны кривых в этих точках стремятся к бесконечности при $i \to \infty$.

Доказательство. Предположим, что кривизны кривых γ ограничены одной и той же постоянной: $|k(x)| \leqslant 1/R$, где $x \in \gamma_i$. Пусть γ — одна из кривых γ_i. Возьмем криволинейную полугеодезическую систему координат с базой γ в окрестности этой кривой. Метрика плоскости в этой системе координат имеет вид

$$d\sigma^2 = dt^2 + (1 - kt)ds^2,$$

где s — параметр длины кривой γ, t — длина отрезка нормали к γ, отсчитываемой от точки кривой внутрь области, ограниченной кривой. При $0 \leqslant t \leqslant (\sqrt{2} - 1)R$, $k \leqslant 1/R$, площадь области

$$\Sigma\colon \{0 \leqslant t \leqslant d \leqslant (\sqrt{2} - 1)R,\ 0 \leqslant s \leqslant l(\gamma)\}$$

на плоскости с учетом кратности покрытия удовлетворяет неравенству

$$S \geqslant \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)d \cdot l(\gamma). \tag{1}$$

Из леммы 4 (см. текст далее) следует, что кратность покрытия меньше 4. В силу того, что отрезок AB имеет конечную длину l_0 и выполняется условие *2*, площадь части области Σ, которая лежит внутри Ω, удовлетворяет неравенству

$$4M > \sqrt{2}(\sqrt{(2)} - 1)dl(\gamma) - l_0 d. \tag{2}$$

Поэтому при достаточно большом $l(\gamma)$ это неравенство не имеет места. И найдется точка области Σ, которая не принадлежит области Ω и лежит выше отрезка AB. Это значит, что в какой-то точке N кривой γ внутренняя нормаль к γ пересечет кривую γ на расстоянии меньше d в некоторой точке T. Ограничимся дугой γ' кривой γ между точками N и T. По лемме 3 в области Ω, ограниченной кривой γ' и отрезком NT, лежит круг радиуса R.

Не ограничивая общности, можно считать, что точки A_i, B_i сходятся к точкам A, B и также сходятся касательные в этих точках. Если возьмем на кривых γ_i дуги конечной длины, отсчитываемые от точек A_i, B_i, ограниченные константой, то из этих дуг можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, длины этих дуг также сходятся. Пусть мы вписали круг радиуса R в область Ω_k; A_{k+1}, B_{k+1} — концы кривой γ_{k+1}. Возьмем на кривой γ_{k+1} точки A'_{k+1}, B'_{k+1} так, чтобы дуги $A_{k+1}A'_{k+1}$, $B_{k+1}B'_{k+1}$ имели длину h, где h достаточно мало.

Пусть $d_k = \min|CD|$, где

1) $C, D \in \gamma_{k+1}$;

2) $C, D \notin A_{k+1}A'_{k+1}$;

3) $C, D \notin B_{k+1}B'_{k+1}$;

4) $CD \bigcap \gamma_k \neq \varnothing$.

Возьмем кривую γ_i, $i > k$, длина которой

$$l(\gamma_i) > \frac{4M + l_0 d_k}{\sqrt{2}(\sqrt{(2)} - 1)d_k},$$

и повторим для нее доказательство, которое было дано для кривой $\gamma = \gamma_k$. Мы получим, что в области Ω_i содержится круг D_i радиуса R. Покажем, что хорда N_iT_i, которая является аналогом хорды NT, не пересекает область Ω. Точки пресечения хорды N_iT_i с кривой γ_{k+1} не могут принадлежать либо дуге $A_{k+1}A'_{k+1}$, либо дуге $B_{k+1}B'_{k+1}$, так как эти дуги сходятся при $i \to \infty$ одновременно с касательными. При достаточно малом h хорда N_iT_i близка к касательным дуги, которую она стягивает на кривой γ и кривой γ_i. А это противоречит тому, что либо в точке N_i, либо T_i хорда перпендикулярна касательной. И так как длина хорды N_iT_i меньше d_k, то хорда N_iT_i не пересекает кривую γ_k. Поэтому круг D_i не пересекается с кругом D.

Повторив эту процедуру неограниченное число раз, мы получим, что при $i \to \infty$ области Ω_i содержат неограниченное число непересекающихся кругов радиуса R. Отсюда следует, что площади областей Ω_i стремятся к бесконечности при $i \to \infty$. Это противоречит условию теоремы.

Формулировка лемм.

Лемма 1 [1]. *Пусть $\gamma(s)$ — плоская кривая кривизны $|k| \leqslant 1/R$. Выберем так прямоугольную систему координат, что точка $\gamma(0)$ совпавдает с началом координат, а касательная совпадает с осью y.*

Пусть S_1, S_2 — полуокружности радиуса R с центрами в точках (R, O), $(-R, O)$, которые касаются оси y в точке $\gamma(0)$. Пусть

$$x = x(s), \qquad y = y(s); \qquad x = x_1(s), \qquad y = y_1(s); \qquad x = x_2(s), \qquad y = y_2(s) \ -$$

параметрические задания кривых γ, S_1, S_2, где s — параметр длины этих кривых, отсчитываемый от точки $\gamma(0)$. Тогда

$$x'_2(s) \leqslant x'(s) \leqslant x'_1(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}R.$$

Лемма 2 [1]. *Пусть $\gamma(s)$ — плоская кривая кривизны $|k| \leqslant 1/R$. Пусть $Z(s)$, $Y(s)$ — левосторонняя и правосторонняя окружности радиуса R, касательные к кривой γ в точке $\gamma(s)$. Пусть $D(s)$ — расстояние от центра окружности $Y(s)$ до центра окружности $Z(o)$. Тогда $D(s)$ — монотонно неубывающая функция s для $0 \leqslant s \leqslant \pi R/2$.*

Лемма 3. *Пусть $\gamma(s)$ — плоская кривая кривизны $|k| \leqslant 1/R$, стянутая хордой AB длины d. Вместе с хордой кривая является замкнутой вложенной кривой, ограничивающей область Ω. Пусть α — угол в точке B между отрезком BA и касательной к кривой γ в точке B.*

Если $d < (\sqrt{2}-1)\sin\alpha R$, то в область Ω можно вписать круг радиуса R.

Доказательство. Рассмотрим случай $0 < \alpha \leqslant \pi/2$. Оценка, которую мы получим, будет верна и для $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Пусть S_1 — окружность радиуса R, касающаяся γ в точке B, которая в окрестности точки B проходит вне области Ω, O_1 — центр этой окружности. Пусть S' — окружность радиуса r', одновременно касающаяся отрезка AB и кривой γ. Гомотетическим преобразованием с коэффициентом $\lambda \geqslant 1$ с центром в точке касания окружностью S' отрезка AB мы получим окружность S радиуса r, которая касается окружности S_1, $r' \leqslant r$. Если окружность S' была вписана в область Ω, то окружность S в общем случае нет. Дадим оценку на r. Рассмотрим четырехугольник O_1OPB, где O — центр окружности S, P — точка касания окружностью S отрезка AB. $OP = r$, $OO_1 = R + r$, $OB = R$, $PB = d_1 \leqslant d$.

Рассмотрим $\triangle OO_1B$; $\angle OBO_1 = \pi/2 + \alpha - \varphi$, где

$$\varphi = \angle PBO; \qquad \sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2+d_1^2}}; \qquad \cos\varphi = \frac{d_1}{\sqrt{r^2+d_1^2}};$$

$$(R+r)^2 = OO_1^2 = r^2 + d_1^2 + R^2 + 2\sqrt{r^2+d_1^2}\cdot R\sin(\alpha-\varphi);$$

$$2Rr = d_1^2 + 2Rd_1\sin\alpha - 2Rr\cos\alpha;$$

$$r = \frac{d_1\left(\dfrac{d_1}{2R}+\sin\alpha\right)}{1+\cos\alpha}; \qquad r \leqslant \frac{d\left(\dfrac{d}{2R}+\sin\alpha\right)}{1+\cos\alpha}.$$

Теперь проведем через точку B вторую окружность S_2 радиуса R, касательную к кривой γ в точке B. Наибольшее расстояние точки этой окружности от прямой AB равно $2R\sin^2(\alpha/2)$. Из леммы 1 следует, что наибольшее расстояние дуги кривой γ длины $s \leqslant \pi R/2$ от прямой AB будет не меньше $2R\sin^2(\alpha/2)$. Поэтому в максимально высокой точке P_0 кривой γ окружность, касательная к кривой и отрезку AB, имеет радиус $\geqslant R\sin^2(\alpha/2)$.

Но если

$$\frac{d\left(\dfrac{d}{2R}+\sin\alpha\right)}{1+\cos\alpha} < R\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad d < R\sin\alpha(\sqrt{2}-1),$$

то окружность, касательная к γ и отрезку AB в этой точке, не лежит внутри замкнутой области Ω. Рассмотрим окружность максимального радиуса, касательную к кривой γ в точке P_0 и вписанную в область Ω. Если радиус этой окружности $\geqslant R_0$, то утверждение леммы доказано. Если радиус этой окружности меньше R, то эта окружность не касается отрезка AB, а касается внутри кривой γ еще по крайней мере одной точки Q_0, отличной от точки P_0. В этом случае рассмотрим дугу кривой γ между точками P_0, Q_0. Окружности максимального радиуса, касательные к кривой γ в точке P дуги P_0Q_0 и вписанные в область Ω, также не касаются отрезка AB.

Г. Пестов и В. Ионин доказали следующую теорему [2]: *Если кривизна замкнутой вложенной кривой* $|k| \leqslant 1/R$, *то найдется круг радиуса* R, *целиком лежащий внутри замкнутой области, ограниченной этой кривой.*

Рассмотрим дугу γ' кривой γ между точками P_0, Q_0. Следуя [2], для точек этой дуги введем интегральный круг кривизны.

Будем говорить, что круг $C(Y)$ есть интегральный круг кривизны кривой γ' в точке Y, если $C(Y)$ лежит целиком в области Ω и либо окружность $C(Y)$ касается γ' по крайней мере в двух различных точках, одна из которых Y, либо $C(Y)$ есть обычный круг кривизны кривой γ' в точке Y.

Так как круги $C(Y)$ для $Y \in \gamma'$ не касаются отрезка AB и касаются кривой γ только в точках кривой γ', то, следуя ходу доказательства теоремы Пестова–Ионина с использованием лемм 2, 3 из [2], мы получаем существование круга радиуса R, вписанного в область Ω.

Лемма 4. *Пусть точка* Q *лежит на внутренних нормалях к кривой* γ *в точках* P_1, $P_2 \in \gamma$; $P_1Q = d_1 < R$; $P_2Q = d_2 < R$;

$$P_1P_2 = h < R\left(\sqrt{4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1} - 1\right);$$

. *Тогда угол* $\varphi = \angle P_1QP_2 > \pi/2$.

Доказательство. Проведем окружности $S(P_1)$, $S(P_2)$ радиуса R, касательные к γ в точках P_1P_2 и в окрестности точек P_1, P_2 лежащие вне области Ω.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть окружности $S(P_1)$, $S(P_2)$ пересекаются в точке P и длины дуг окружностей P_1P, P_2P не превосходят $\pi R/4$. Тогда из леммы 1 следует, что длина дуги P_1P_2 кривой γ не превосходит $\pi R/2$. В этом случае из леммы 2 следует невозможность пересечения нормалей в точке Q.

2. Окружности пересекаются в точке P, но длина одной из дуг P_1P, P_2P больше $\pi R/4$. Тогда длина отрезка $P_1P_2 = h > \left(\sqrt{4(1 - \sqrt{2}/2) + 1} - 1\right)R$. По условию леммы h удовлетворяет противоположному неравенству и этот вариант не реализуется.

3. Окружности $S(P_1)$, $S(P_2)$ не пересекаются. Вращаем их вокруг точек P_1, P_2 так, чтобы они коснулись в точке P. При этом углы φ_1, φ_2, которые образуют окружности с отрезком P_1P_2, уменьшатся. Так как длина $P_1P_2 = h < \left(\sqrt{4(1 - \sqrt{2}/2) + 1} - 1\right)R$, то в новом положении на окружности высекаются дуги длины меньше $\pi/4$.

Рассмотрим криволинейный треугольник, обрисованный новым положением окружностей и отрезком P_1P_2, φ_1', φ_2' — углы между отрезком P_1P_2 и новыми окружностями. Тогда

$$(\pi - \varphi_1') + (\pi - \varphi_2') + \pi - \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi,$$

где α_1, α_2 есть повороты дуг окружностей P_1P, P_2P;

$$\varphi_1' + \varphi_2' = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 > \frac{\pi}{2}.$$

Первоначальные углы $\varphi_1 > \varphi_1'$, $\varphi_2 > \varphi_2'$. И угол $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \angle P_1QP_2 > \pi/2$, чем утверждение леммы доказано.

Так как $h < d_1 + d_2$, то взяв

$$d_1 + d_2 < \left(\sqrt{4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1} - 1\right)R,$$

мы удовлетворим условия леммы и получим, что точки области Ω покрываются множеством Σ криволинейной системы координат с кратностью меньше 4.

1. *Dubins L. E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. – 1957. – **79**. – P. 497–516.
2. *Пестов Г., Ионин В.* О наибольшем круге, вложенном в замкнутую кривую // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, № 6. – С. 1170–1172.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 23.09.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Borisenko, M. A. Golitsyna**

About the curvature of some family of plane curves

It is proved that the maximum of the curvature of some family of curves tends to infinity with the lengths of curves.