



УДК 539.3;616.314

© 2011

Академик НАН України **Я. М. Григоренко, А. Я. Григоренко, М. Ф. Копытко, А. Н. Москаленко, Л. А. Хоменко**

### **Математическое моделирование функциональной нагрузки при поражении твердых тканей зуба кариесом**

*Вивчення біомеханіки твердих тканин зуба при лікуванні карієсу зубів з локалізацією каріозних порожнин на різних ділянках зуба є обґрунтованим для правильного вибору різних композиційних матеріалів. Досліджено вплив каріозної порожнини в коронковій частині зуба на її несучу здатність на підставі механіко-математичної моделі і методу кінцевих елементів. Запропоновано підхід, що дає можливість проаналізувати вплив розмірів і локалізації каріозної порожнини на величину напруги в її ділянці і виробити план раціонального лікування.*

Кариес зубов рассматривается как бактериальное заболевание твердых тканей зуба, связанное с прогрессирующим разрушением структуры зуба. Его развитие тесно связано с зубной бляшкой (зубной биопленкой). Зубная бляшка — это скопление микроорганизмов в матриксе органических веществ — протеинов и полисахаридов. В развитии и влиянии зубной бляшки на эмаль зуба важная роль принадлежит наиболее кариесогенному микроорганизму — *Str. mutans*. Он обладает высокой степенью адгезии к поверхности зубов и способен из простых сахаров вырабатывать кислоты и внеклеточные полисахариды. Кислоты вызывают деминерализацию эмали, а внеклеточные полисахариды образуют матрикс зубной биопленки, которая ограничивает возможности нейтрализации кислот [1].

Участки деминерализации эмали вначале образуются в ее подповерхностном слое, затем они быстро распространяются в поверхностный слой эмали. Интенсивное употребление углеводов приводит к снижению pH бляшки. Это создает условия для еще большего роста *Str. mutans* и лактобацилл. Увеличение их числа сопровождается более высоким темпом продукции кислоты, вследствие чего усиливается деминерализация зубов [2]. Низкие значения pH, наблюдаемые под бляшкой вследствие кислотообразования, создают благоприятные условия для растворения кристаллов гидроксиапатита эмали зуба. При преобладании процессов деминерализации возникает кариес с образованием каріозної порожнини. По показателю функциональной устойчивости и прочности твердых тканей зуба можно судить о динамике процессов минерализации эмали.

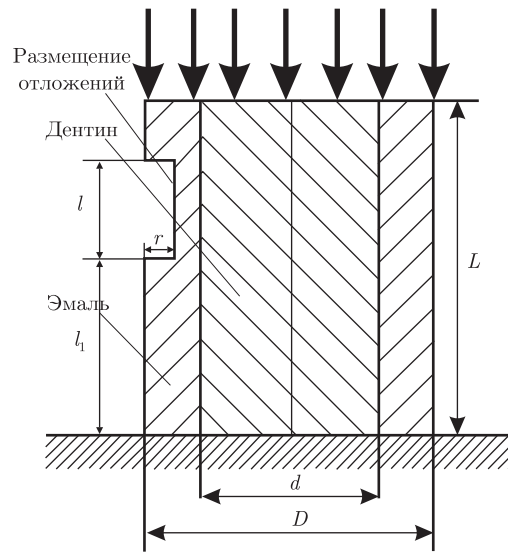


Рис. 1

Процесс активной деминерализации эмали сопровождается увеличением в ней микропространств и снижением биологической адаптации эмали и дентина к жевательной функции. Известно, что в процессе жевательной функции определяются зоны максимальных напряжений — область экватора коронки, окклюзионная поверхность и шейка зуба [3]. Установлено, что на функциональную прочность твердых тканей зуба влияет показатель микротвердости, который измеряется в зависимости от клинического состояния коронки. Поражение кариесом снижает микротвердость эмали на 30–40% [4]. Таким образом, упругомеханические свойства эмали, их несущая способность будут значительно зависеть от состояния гигиены полости рта, степени поражения твердых тканей зуба, возраста и других факторов.

**Построение механико-математической модели.** В последнее время для анализа различных аспектов процессов лечения в стоматологии все шире применяются методы механико-математического моделирования [5–9]. Применение указанных подходов позволяет определить ряд количественных показателей, необходимых для разработки плана рационального лечения.

Будем рассматривать напряженно-деформированное состояние цилиндрической конструкции (рис. 1), которая моделирует коронковую часть зуба с повреждением. Конструкция состоит из двух упругих слоев эмали и дентина. Повреждение зуба характеризуется высотой размещения (расстояние от края жесткого защемления)  $l_1$ , высотой  $l$  и глубиной повреждения  $r$ . Конкретные значения параметров повреждения показаны на рис. 1.

Модель напряженно-деформированного состояния поврежденной коронковой части зуба имеет площадь симметрии, поэтому при проведении исследований рассматривается ее половина (рис. 2).

Предлагаемая механико-математическая модель дает возможность исследовать влияние на напряженно-деформированное состояние коронковой части зуба в области повреждения с учетом размера, его расположения, а также соотношений модулей упругости дентина и эмали. Наличие области повреждения зуба обуславливает необходимость применения пространственной декартовой системы координат —  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

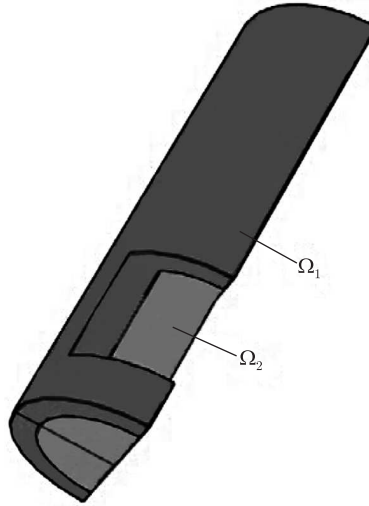


Рис. 2

Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородного тела, которое занимает ограниченную область  $\Omega \in R^3$ ,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  с непрерывной по Липшицу границей  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ , описывается уравнениями линейной теории упругости [9]. На границе  $\Gamma_\sigma$  действует система внешних поверхностных сил, которые представлены компонентами вектора поверхностного нагружения  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ . На границе  $\Gamma_u$  задается вектор перемещений  $\vec{u}_\Gamma = (u_x^\Gamma, u_y^\Gamma, u_z^\Gamma)$ .

В каждой из областей  $\Omega_i$  выполняются уравнения пространственной теории упругости. Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}^i}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}^i}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^i}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= 0; \\ (x, y, z) \in \Omega_i, \quad i &= 1, 2, \end{aligned} \tag{1}$$

геометрические соотношения Коши:

$$\vec{\varepsilon}^i = B^i \vec{u}^i, \quad (x, y, z) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

физические соотношения (закон Гука):

$$\vec{\sigma}^i = D^i \vec{\varepsilon}^i \quad (x, y, z) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Система уравнений (1)–(3) для всех подобластей  $\Omega_i$  дополняется статическими граничными условиями:

$$\sigma_{nx} = p_x, \quad \sigma_{ny} = p_y, \quad \sigma_{nz} = p_z(x, y, z) \in \Gamma_\sigma, \tag{4}$$

кинематическими граничными условиями:

$$u_x = u_x^\Gamma, \quad u_y = u_y^\Gamma, \quad u_z = u_z^\Gamma, \quad (x, y, z) \in \Gamma_u, \quad (5)$$

и условиями сопряжения подобластей  $\Omega_i$  (условиями идеального механического контакта):

$$\sigma_{nx}^i = \sigma_{nx}^j, \quad \sigma_{ny}^i = \sigma_{ny}^j, \quad \sigma_{nz}^i = \sigma_{nz}^j, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (6)$$

$$u_x^i = u_x^j, \quad u_y^i = u_y^j, \quad u_z^i = u_z^j, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (7)$$

где

$$\sigma_{nx}^i = \sigma_{xx}^i \cos(\vec{n}, x) + \sigma_{xy}^i \cos(\vec{n}, y) + \sigma_{xz}^i \cos(\vec{n}, z),$$

$$\sigma_{ny}^i = \sigma_{xy}^i \cos(\vec{n}, x) + \sigma_{yy}^i \cos(\vec{n}, y) + \sigma_{yz}^i \cos(\vec{n}, z),$$

$$\sigma_{nz}^i = \sigma_{xz}^i \cos(\vec{n}, x) + \sigma_{yz}^i \cos(\vec{n}, y) + \sigma_{zz}^i \cos(\vec{n}, z),$$

$\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе области  $\Omega_i$ .

Для решения поставленной задачи будем применять метод конечных элементов. Вариационная постановка задачи формулируется следующим образом. Необходимо найти функцию  $\vec{u} \in V \equiv \{\vec{v} \in W_2^{(1)}(\Omega) \mid \vec{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$ , на которой достигается минимум функционала Лагранжа

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (B^i u^i)^T D^i B^i u^i d\Omega_i - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} p^T u^i d\Omega_i. \quad (8)$$

Решением задачи (1)–(7) или задачи (8) является поле перемещений, деформаций и напряжений. С точки зрения прочности рассматриваемых конструктивных элементов основным критерием является сравнение максимальных напряжений с соответствующими для каждого материала их граничными значениями. Будем выбирать для оценки напряженного состояния эквивалентные напряжения (по Мизесу), которое определяется по формуле

$$\sigma_M = \sqrt{0,5[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \quad (9)$$

**Анализ результатов расчетов.** Приведем пример расчетов напряженно-деформированного состояния коронковой части зуба с повреждением только материала эмали на основе конечноэлементной модели. Расчеты проводились для конкретных параметров повреждения:  $l_1 = 5$  мм,  $l = 2$  мм,  $r = 0,5$  мм. Упругие свойства эмали и дентина:  $E_e = 70 \div 115$  ГПа,  $E_d = 14 \div 28$  ГПа, выбирались на основании данных работы [4]. На рис. 3 построены графики напряжений для коронковой части зуба с повреждением и без него для  $E_e/E_d = 5$  (величины напряжения приведены вдоль оси  $Oy$  при  $x = -3,4$  мм,  $z = 0,1$  мм в окрестности максимального напряжения в эмали). Анализ полученных данных показывает, что наличие повреждения почти в два раза повышает величину напряжения в его окрестности. На рис. 4 приведены значения напряжений для различных соотношений модулей упругости эмали и дентина. Величина напряжения в окрестности повреждения становится больше при увеличении отношения значений модулей упругости эмали и дентина.

Таким образом, применение математического моделирования позволяет получить количественные оценки влияния характера и величины повреждения на несущую способность

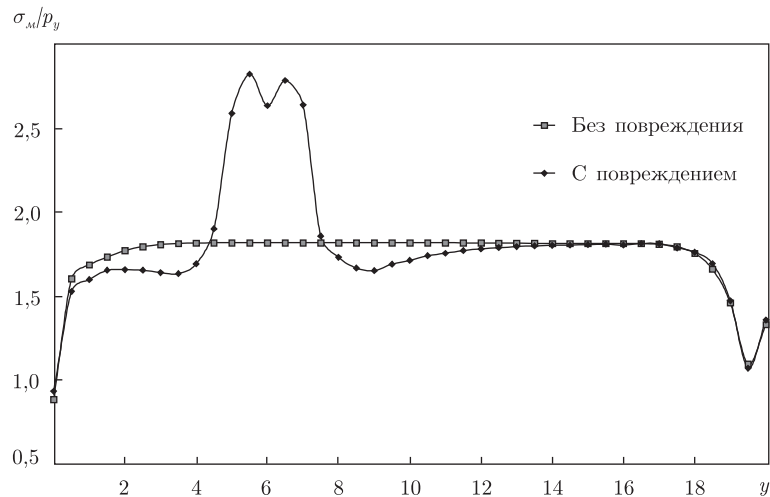


Рис. 3

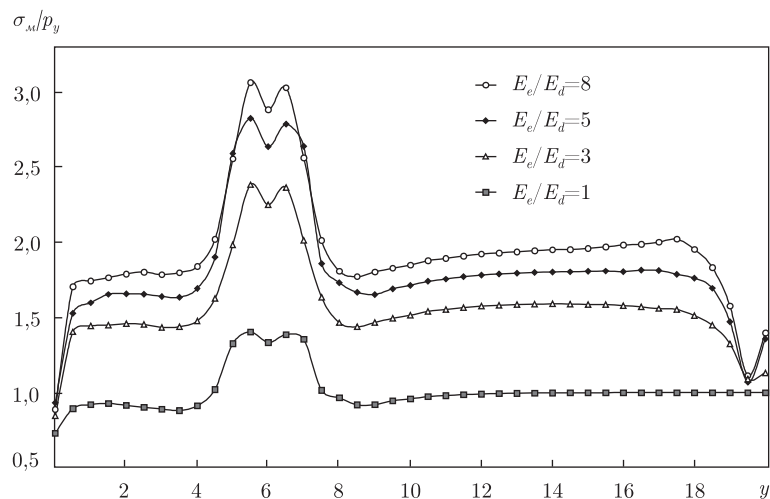


Рис. 4

коронковой части зуба. Увеличение функциональной нагрузки, ослабление по ряду причин структуры и механических свойств эмали в коронковой ее части может привести к отлому, микротрещинам эмали либо к дефекту реставрационного материала при развитии кариеса.

1. Леонтьев В. К., Кисельникова Л. П. Детская терапевтическая стоматология. Национальное руководство. – Москва: ГЭОТАР-Медиа, 2010. – 890 с.
2. Земнова Е. Г., Заславская М. И., Салина Е. В., Рассанов С. П. Микрофлора полости рта: норма и патология. – Нижний Новгород: НГМА, 2004. – 156 с.
3. Зырянов Б. Н., Онлоев П. А., Онлоев А. П. Микротвердость зубных тканей в патогенезе кариеса зубов у населения Крайнего Севера // Новое в стоматологии. – 2001. – № 10. – С. 94–95.
4. Логина Н. К., Колесник А. Г., Бартнев В. С. Физиология эмали и дентина // Стоматология. – 2006. – 85, № 4. – С. 60–68.
5. Григоренко Я. М., Неспрядько В. П., Топка П. П., Григоренко А. Я. О влиянии неравномерности напряженного состояния на оценку остаточной мощности периодонта зубов // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 10. – С. 67–73.

6. Григоренко А. Я., Джарбуе М., Дорошенко С. И. и др. Моделирование процесса расширения зубных дуг на основе ортодонтического устройства, оснащенного упругим элементом // Доп. НАН України. – 1999. – № 2. – С. 74–78.
7. Григоренко О. Я., Дорошенко С. І., Жачко Н. І. та ін. Моделювання процесу повороту зуба при апаратурному лікуванні // Там само. – 2002. – № 7. – С. 183–188.
8. Григоренко Я. М., Неспрядько В. П., Лось В. В., Григоренко А. Я. Планирование протезирования на внутрикостных имплантатах на основе изучения напряженно-деформационного состояния костной ткани челюстей // Современ. стоматология. – 2004. – № 4. – С. 122–129.
9. Дзяк І. І., Копитко М. Ф., Коржун А. М. Комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану просторових конструкцій // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2009. – № 650. – С. 227–235.

Национальный медицинский университет  
им. А. А. Богомольца, Киев  
Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.11.2010

Academician of the NAS of Ukraine **Ya. M. Grigorenko, A. Ya. Grigorenko,  
M. F. Kopytko, A. N. Moskalenko, L. A. Khomenko**

### **The modeling of a functional load of carious hard tooth tissues**

*Study of hard tooth tissues biomechanics during treatment of caries cavities of different localizations is substantiated for the right choice of different resin-based filling materials. Research of the influence of a caries cavity in the tooth coronal part on its carrying capacity is performed on the basis of a mechanical-mathematical model and the method of finite elements. The suggested approach allows one to carry out the analysis of the influence of the size and localization of a caries cavity on the stress in its area and to develop the plan of rational treatment.*