УДК 519.95

В. М. Колодяжний, О. Ю. Лісіна

Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Наведено схему побудови сімейств атомарних радіальних базисних функцій, які є нескінченно диференційовними фінітними розв'язками функціонально-диференціальних рівнянь, породжених операторами Лапласа та Гельмгольца.

При реалізації чисельних алгоритмів розв'язання крайових задач математичної фізики безсітковими методами одним з найважливіших критеріїв одержання якісних розв'язків є вибір системи базисних функцій. Створення відповідних базисних систем здійснюється на основі функцій, які задовольняють властивість інваріантності не тільки при виконанні операцій зсувів, але й при поворотах і відображеннях в евклідовому просторі, а саме на позитивно визначених функціях, що утворюють класи радіальних базисних функцій (РБФ) [1] та атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ) [2–6]. РБФ-методи найчастіше застосовуються в сучасній теорії апроксимації, коли вирішується задача опрацювання розподілених даних у багатовимірному просторі. Спочатку такі методи були використані в геодезії, геофізиці та метрології, пізніше — у чисельних процедурах розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними [1]. Використання АРБФ багатьох змінних потребує вміння отримувати певні сімейства атомарних функцій, щоб розширити їх апроксимаційні можливості при дослідженні прикладних задач.

1. Відповідні сімейства АРБФ утворюються при розв'язуванні функціонально-диференціальних рівнянь виду

$$Lu(x) = \lambda \oint\limits_{\partial\Omega} u[k(x-\xi)]\, d\omega + \mu u(kx), \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; L — один з диференціальних операторів: $\triangle$, $\triangle \pm \delta^2$, $\triangle^2$: $\triangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$; $\partial\Omega$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 = r_k^2$; λ, μ — параметри, які уточнюються в процесі розв'язку; δ — параметр оператора Гельмгольца; k — коефіцієнт стиску, який вибирається на основі залежності шуканих функцій від величини стиску.

Питання існування певних класів атомарних функцій досліджувалось в роботах [2–7], в яких розглядалася побудова розв'язків відповідних функціонально-диференціальних рівнянь у випадку, коли $k = 3$:

$$Lu(x, y) = \lambda \oint\limits_{\partial\Omega} u[3(x-\xi)]\, d\omega + \mu u(3x). \tag{2}$$

З метою побудови сімейств АРБФ трьох незалежних змінних для визначеного класу атомарних функцій, що породжуються оператором Гельмгольца, розглянемо функціонально-диференціальне рівняння виду

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) = \\ = \lambda \oint\limits_{\partial\Omega} u[k(x_1 - \xi_1), (x_2 - \xi_2), (x_3 - \xi_3)]\, d\omega + \mu u(kx_1, kx_2, kx_3), \tag{3}$$

де $\partial\Omega$: $\sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i^2 = r_k^2$, $r_k = R(k)$. Зауважимо, що $R(k)$ може мати різні зображення залежно від k: $R(k) = (k+1)/2k$ або $R(k) = (2k-1)/2k$. Бажано звернути увагу на те, що розміри області $\partial\Omega$ залежать від коефіцієнта стиску і можуть змінюватися в процесі побудови розв'язку вихідної задачі за потребою забезпечення певних властивостей функцій.

2. Застосуємо тривимірне перетворення Фур'є

$$U(t_1, t_2, t_3) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) e^{-i(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

до рівняння (3):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\Delta u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3)] e^{-i(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \iint\limits_{\partial\Omega} u[k(x_1 - \xi_1), k(x_2 - \xi_2), k(x_3 - \xi_3)]\, d\omega + \\ + \mu u(kx_1, kx_2, kx_3) e^{-i(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3)} dx_1 dx_2 dx_3. \tag{4}$$

Позначимо $k(x_i - \xi_i) = \eta_i$, $i = 1, 2, 3$, звідки $x_i = \eta_i/k + \xi_i$. Заміна порядку інтегрування приводить рівняння (4) до вигляду

$$-(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) U(t_1, t_2, t_3) - \delta^2 U(t_1, t_2, t_3) = \lambda \iint\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\left(k\frac{\eta_1}{k}, k\frac{\eta_2}{k}, k\frac{\eta_3}{k}\right) \times \\ \times e^{-i\left[t_1\left(\frac{\eta_1}{k} + \xi_1\right) + t_2\left(\frac{\eta_2}{k} + \xi_2\right) + t_3\left(\frac{\eta_3}{k} + \xi_3\right)\right]} d\frac{\eta_1}{k} d\frac{\eta_2}{k} d\frac{\eta_3}{k} + \frac{\mu}{k^3} U\left(\frac{t_1}{k}, \frac{t_2}{k}, \frac{t_3}{k}\right),$$

який можна виписати у такій формі:

$$-(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \delta^2) U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{k^3} U\left(\frac{t_1}{k}, \frac{t_2}{k}, \frac{t_3}{k}\right) \left[\lambda \iint\limits_{\partial\Omega} e^{-i(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3)} d\omega + \mu\right]. \tag{5}$$

Зауважимо, що в інтегралі в квадратних дужках інтегрування виконується за сферою $\partial\Omega$: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r_k^2$. Легко бачити, що у показнику підінтегральної функції поданий скалярний добуток двох векторів $\vec{T} = (t_1, t_2, t_3)$, $\vec{\Xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, де вектор $\vec{T}$ направлений уздовж аплікати декартової системи координат, в якій визначається сфера $\partial\Omega$, а вектор $\vec{\Xi}$ направлений уздовж радіуса вектора, що описує цю сферу.

Застосувавши сферичні координати $x_1 = r_k \sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = r_k \sin\theta \sin\varphi$, $x_3 = r_k \cos\varphi$ [8, 9], перепишемо інтеграл за поверхнею у вигляді

$$\iint\limits_{\partial\Omega} e^{-i(t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3)} d\omega = r_k^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-ir_k\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}} \sin\theta d\theta d\varphi,$$

та зведемо вихідний інтеграл (у квадратних дужках рівняння (5)) до елементарної функції:

$$\iint\limits_{\partial\Omega} e^{-i(t_1\xi_1+t_2\xi_2+t_3\xi_3)} d\omega = 4\pi r_k^2 \frac{\sin r_k\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}{r_k\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}.$$

Таким чином, рівняння (5) запишемо у вигляді

$$U(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{k^3} U\left(\frac{t_1}{k}, \frac{t_2}{k}, \frac{t_3}{k}\right) \left[\lambda 4\pi r_k^2 \frac{\sin r_k\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}{r_k\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}} + \mu\right] \frac{1}{(-\delta^2 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)}. \qquad (6)$$

З потреби забезпечення того, щоб вираз у квадратних дужках був цілою функцією, скористаємось можливістю вибору параметра μ з умови $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \to 0$, тобто $\mu = -\dfrac{4\pi}{i\delta}\lambda r_k \sin r_k i\delta$.

Структура рівняння (6), а саме вигляд $f(t) = \prod\limits_{h=0}^{+\infty} f(t/k^h)$, дає можливість зобразити дане співвідношення у вигляді нескінченного добутку [2]:

$$U(t_1, t_2, t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - 4\pi r_k^2 \lambda \dfrac{\sin \dfrac{r_k}{k^h}\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}{\dfrac{r_k}{k^h}\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}}{k^3\left(\delta^2 + \dfrac{t_1^2+t_2^2+t_3^2}{k^{2h}}\right)}. \qquad (7)$$

Для забезпечення збіжності нескінченного добутку (7) виберемо параметр λ з умови, коли $h = 0$, а $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \to 0$, тобто $\lambda = -\dfrac{(k\delta)^3 i}{4}\pi r_k[\sin(r_k i\delta) + r_k i\delta]$.

На основі узагальнення теореми Вінера–Пелі [10] для багатовимірного випадку, теореми Поліа–Планшереля [11] встановлюємо, що функція $u(x_1, x_2, x_3)$ є нескінченно диференційовною функцією з компактним носієм, для якої перетворення Фур'є $U(t_1, t_2, t_3)$ зображається швидкоспадною цілою функцією експоненціального типу. Описані умови забезпечують в результаті застосування зворотного перетворення Фур'є до функції (7) отримання фінітної функції (носієм цієї функції буде одиничного радіуса куля). Згідно з термінологією робіт [2–5], дану функцію позначатимемо $\mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3)$ та вважатимемо атомарною функцією. Зауважимо, що індекс k вказує на можливість розширення підкласу функцій $\mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3)$ з метою отримання необхідних характеристик функції.

Функція $\mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3)$ є парною відносно своїх змінних і може бути зображена розкладеною в трикратний ряд Фур'є [6]

$$\mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr}\cos(p\pi x_1)\cos(q\pi x_2)\cos(r\pi x_3), \tag{8}$$

в якому коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
&a_{000} = \frac{1}{8};\\
&a_{p00} = \frac{1}{4}\widetilde{\mathrm{Horp}}_k(p\pi, 0, 0); \qquad a_{0q0} = \frac{1}{4}\widetilde{\mathrm{Horp}}_k(0, q\pi, 0); \qquad a_{00r} = \frac{1}{4}\widetilde{\mathrm{Horp}}_k(0, 0, r\pi);\\
&a_{pq0} = \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Horp}}_k(p\pi, q\pi, 0); \qquad a_{p0r} = \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Horp}}_k(p\pi, 0, r\pi); \qquad a_{0qr} = \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Horp}}_k(0, q\pi, r\pi);\\
&a_{pqr} = \widetilde{\mathrm{Horp}}(p\pi, q\pi, r\pi),
\end{aligned} \tag{9}$$

де $p, q, r = 1, 2, \ldots$; $\widetilde{\mathrm{Horp}}_k(t_1, t_2, t_3) = U(t_1, t_2, t_3)$.

Функції $\mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3)$ утворюють сімейство підкласу атомарних функцій, які породжуються модифікованим диференціальним оператором Гельмгольца $\Delta - \delta^2$.

3. Отримані в п. 2 результати можуть бути підсумовані такою теоремою.

Теорема 1. *Сімейство атомарних функцій* $\mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3)$*, які є розв'язками функціонально-диференціального рівняння* (3) *при визначених значеннях параметрів*

$$\mu = -\frac{4\pi}{i\delta}\lambda r_k \sin r_k i\delta; \qquad \lambda = -\frac{(k\delta)^3 i}{4\pi r_k[\sin(r_k i\delta) + r_k i\delta]},$$

є фінітними нескінченно диференційовними функціями з одиничною кулею як носієм, нормованими умовою $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 = 1$*, що мають зображення в кубі* $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ *рядом Фур'є* (8) *з коефіцієнтами Фур'є* (9).

Перетворення Фур'є (7) *функції* $\mathrm{Horp}_k(x_1, x_2, x_3)$ *є швидкоспадною при* $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \to \infty$ *функцією експоненціального типу.*

Згідно з вищевказаною схемою можна утворити сімейства фінітних розв'язків відповідних функціонально-диференціальних рівнянь, які породжені диференціальними операторами Лапласа та Гельмгольца. Підсумувати наведене можна такими теоремами.

Теорема 2. *Сімейство атомарних функцій* $K\mathrm{Gorp}_k(x_1, x_2, x_3)$*, які є розв'язком функціонально-диференціального рівняння*

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) + \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \lambda \oint_{\partial\Omega} u[k(x_1 - \xi_1), k(x_2 - \xi_2), k(x_3 - \xi_3)]\, d\omega + \mu u(kx_1, kx_2, kx_3),$$

де $\partial\Omega$ *— сфера:* $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r_k^2$*, із значеннями параметрів*

$$\mu = -\frac{4\pi}{\delta}\lambda r_k \sin r_k\delta; \qquad \lambda = -\frac{(k\delta)^3}{4\pi r_k[\sin(r_k\delta) - r_k\delta]}$$

є фінітними нескінченно диференційовними функціями з одиничною кулею як носієм, нормованими умовою $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\mathrm{Gorp}_k(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = 1$, *та мають зображення в кубі* $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ *рядом Фур'є*

$$KGorp_k(x_1,x_2,x_3) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr}\cos(p\pi x_1)\cos(q\pi x_2)\cos(r\pi x_3)$$

з коефіцієнтами Фур'є

$$a_{000} = \frac{1}{8};$$

$$a_{p00} = \frac{1}{4}\widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(p\pi,0,0); \quad a_{0q0} = \frac{1}{4}\widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(0,q\pi,0); \quad a_{00r} = \frac{1}{4}\widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(0,0,r\pi);$$

$$a_{pq0} = \frac{1}{2}\widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(p\pi,q\pi,0); \quad a_{p0r} = \frac{1}{2}\widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(p\pi,0,r\pi); \quad a_{0qr} = \frac{1}{2}\widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(0,q\pi,r\pi);$$

$$a_{pqr} = \widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(p\pi,q\pi,r\pi).$$

Перетворення Фур'є функції $K\mathrm{Gorp}_k(x_1,x_2,x_3)$,

$$\widetilde{K\mathrm{Gorp}}_k(t_1,t_2,t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - 4\pi r_k^2\lambda \dfrac{\sin\left(r_k\dfrac{\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}{k^h}\right)}{r_k\dfrac{\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}{k^h}}}{k^3\left(\dfrac{t_1^2+t_2^2+t_3^2}{k^{2h}} - \delta^2\right)},$$

є швидкоспадною при $t_1^2+t_2^2+t_3^2 \to \infty$ *функцією експоненціального типу.*

Для дещо спрощеного рівняння виду (3), коли $\delta = 0$, отримуємо.

Теорема 3. *Сімейство атомарних функцій* $\mathrm{Gorp}_k(x_1,x_2,x_3)$, *які є розв'язком функціонально-диференціального рівняння*

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3) = \lambda \oint_{\partial\Omega} u[k(x_1-\xi_1),k(x_2-\xi_2),k(x_3-\xi_3)]\,d\omega + \mu u(kx_1,kx_2,kx_3),$$

де $\partial\Omega$ *— сфера:* $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = r_k^2$, *із значеннями параметрів*

$$\lambda = \frac{k^3}{4\pi r_k^2}; \qquad \mu = -4\pi r_k^2\lambda$$

є фінітними нескінченно диференційовними функціями з одиничною кулею як носієм, нормованими умовою $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Gorp}_k(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = 1$, *що мають зображення в кубі* $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ *рядом Фур'є*

$$\mathrm{Corp}_k(x_1,x_2,x_3) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr}\cos(p\pi x_1)\cos(q\pi x_2)\cos(r\pi x_3)$$

з коефіцієнтами Фур'є

$$a_{000} = \frac{1}{8},$$

$$a_{p00} = \frac{1}{4}\widetilde{\mathrm{Gorp}}_k(p\pi, 0, 0); \qquad a_{0q0} = \frac{1}{4}\widetilde{\mathrm{Gorp}}_k(0, q\pi, 0); \qquad a_{00r} = \frac{1}{4}\widetilde{\mathrm{Gorp}}_k(0, 0, r\pi);$$

$$a_{pq0} = \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Gorp}}_k(p\pi, q\pi, 0); \qquad a_{p0r} = \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Gorp}}_k(p\pi, 0, r\pi); \qquad a_{0qr} = \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Gorp}}_k(0, q\pi, r\pi);$$

$$a_{pqr} = \widetilde{\mathrm{Gorp}}_k(p\pi, q\pi, r\pi).$$

Перетворення Фур'є функції $\mathrm{Gorp}_k(x_1, x_2, x_3)$,

$$\widetilde{Corp}_k(t_1, t_2, t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - 4\pi r_k^2 \lambda \dfrac{\sin\left(r_k \dfrac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{k^h}\right)}{r_k \dfrac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{k^h}}}{k^{3-2h}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)},$$

є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \to \infty$ *функцією експоненціального типу.*

Запропонована процедура побудови сімейств атомарних радіальних базисних функцій розширює можливості безсіткових підходів наближеного розв'язання крайових задач на основі АРБФ і дозволяє вибирати як базисні такі функції з побудованих сімейств, які покращують якість наближення.

1. *Buhmann M. D.* Radial basis functions: theory and implementations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 259 p.
2. *Колодяжний В. М., Рвачов В. О.* Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 17–22.
3. *Колодяжний В. М., Рвачов В. О.* Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних // Там само. – 2005. – № 1. – С. 12–20.
4. *Колодяжний В. М., Рвачов В. О.* Фінітні функції, що породжені бігармонічним оператором // Там само. – 2006. – № 2. – С. 23–30.
5. *Колодяжний В. М., Рвачов В. О.* Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними // Там само. – 2004. – № 5. – С. 17–22.
6. *Колодяжный В. М., Рвачов В. А.* Атомарные функции трех переменных инвариантные относительно группы вращения // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 6. – С. 118–130.
7. *Колодяжный В. М., Рвачов В. А.* Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений // Там же. – 2007. – № 6. – С. 155–177.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
9. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп. – Москва: Наука, 1965. – 588 с.
10. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурьє в комплексной области. – Москва: Наука, 1964. – 269 с.
11. *Ронкин Л. И.* Элементы теории аналитических функций многих переменных. – Киев: Наук. думка, 1977. – 167 с.

Інститут проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків
Харківський національний
автомобільно-дорожній університет

Надійшло до редакції 17.11.2010

V. M. Kolodyazhny, O. U. Lisina

On the formation of the families of atomic radial basis functions

The scheme of building a family of atomic radial basis functions which are infinitely differentiable finite solutions of the functional-differential equations containing the Laplace and Helmholtz operators is introduced.