УДК 517.977

И. И. Матичин

Управление системами с дробными производными в условиях конфликта

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Розглядається задача керування квазілінійними процесами з дробовими похідними в умовах протидії. Вивчаються дробові похідні Хільфера, що включають в себе, зокрема, класичні похідні Рімана–Ліувілля і регуляризовані похідні Капуто. Одержано зображення розв'язків таких систем, що дозволяє на основі методу розв'язувальних функцій отримати гарантований результат при зближенні траєкторії з заданою цільовою множиною. Якісні результати ілюструються на прикладі з рівнянням Баглі–Торвіка, що описує згасаючі коливання з дробовим демпфуванням.

Дробное интегро-дифференцирование. Правосторонний интеграл Римана–Лиувилля порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, от функции f определяется как

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ — гамма-функция. Здесь и далее будем полагать, что J^0 представляет собой оператор тождественного преобразования: $J^0 f(t) \equiv f(t)$.

Для существования интеграла Римана–Лиувилля достаточно предположить, что $f(t)$, $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ — локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция.

Пусть теперь $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$, а функция f имеет абсолютно непрерывные производные до порядка m. Положим производную порядка α, типа $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ равной:

$$D^{\alpha,\mu} f(t) = J^{\mu(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} f(t). \tag{1}$$

Данная производная обобщает на случай $\alpha > 1$ определение, введенное Хильфером [1].

При $\mu = 0$ из (1) мы получим производную Римана–Лиувилля [2] порядка α

$$D^{\alpha,0} f(t) = D^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t),$$

а типу $\mu = 1$ соответствует производная Капуто:

$$D^{\alpha,1} f(t) = D^{(\alpha)} f(t) = J^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t). \tag{2}$$

Представление решений уравнений дробного порядка. Рассмотрим обобщенную матричную функцию Миттаг–Леффлера:

$$E_{\rho}(B;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)},$$

где $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), а B — произвольная квадратная матрица порядка n.

Обобщенная матричная функция Миттаг–Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка.

Пусть $z = z(t)$, $z \in \mathbb{R}^n$, — фазовый вектор, задающий состояние динамической системы в момент t, а эволюция системы описывается уравнением

$$D^{\alpha,\mu} z = Az + f, \qquad m-1 < \alpha < m, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\frac{d^i}{dt^i} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} z(t) \Big|_{t=0+} = z_i^0, \qquad i = 0, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Применяя преобразование Лапласа и приведенные в [3, 4] результаты относительно преобразования Лапласа обобщенной матричной функции Миттаг–Леффлера, можно получить явное представление решения (3) с начальными условиями (4):

$$z(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^{i-(1-\mu)(m-\alpha)} E_{1/\alpha}(At^\alpha; i-(1-\mu)(m-\alpha)+1) z_i^0 +$$
$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) f(\tau)\, d\tau.$$

Положив $\mu = 1$, получаем регуляризованную производную Капуто и система принимает вид

$$D^{(\alpha)} \check{z} = A\check{z} + f$$

с начальными условиями

$$\frac{d^i}{dt^i} \check{z}(t) \Big|_{t=0+} = \check{z}_i^0, \qquad i = 0, \ldots, m-1. \tag{5}$$

Решение данной задачи Коши запишется в виде

$$\check{z}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i E_{1/\alpha}(At^\alpha; i+1) \check{z}_i^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) f(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Постановка задачи, схема метода. Рассмотрим квазилинейную конфликтно управляемую систему с дробной производной Хильфера произвольного порядка α, $\alpha > 0$, типа μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$:

$$D^{\alpha,\mu} z = Az + \varphi(u,v), \qquad m-1 < \alpha < m, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Здесь фазовый вектор z принадлежит n-мерному вещественному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, A — квадратная матрица порядка n, блок управления — непрерывная по совокупности переменных функция $\varphi(u,v)$, $\varphi\colon U\times V\to\mathbb{R}^n$, где u и v — это управляющие параметры игроков, которые выбираются из множеств U и V, являющихся компактами пространства $\mathbb{R}^n$, $U,\ V\in K(\mathbb{R}^n)$.

Начальные условия для процесса (7) заданы в виде (4). В частости, при $\mu=1$ начальные условия задаются формулой (5). Обозначим $z^0=(z_0^0,\ldots,z_{m-1}^0)$.

Кроме динамического процесса (7) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^*=M_0+M, \tag{8}$$

где M_0 — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, а $M\in K(L)$ ($L=M_0^\perp$ — ортогональное дополнение к M_0 в $\mathbb{R}^n$).

Первый игрок (u) пытается вывести траекторию процесса (7) на множество (8), а второй (v) — максимально оттянуть момент попадания траектории на терминальное множество.

Приняв сторону первого игрока, будем считать, что он формирует свое управление на основании информации о z^0 и $v(t)$, т. е. $u(t)=u(z^0,v(t))$, и является контруправлением.

Изложим схему метода разрешающих функций [5] применительно к задаче (7), (8).

Обозначим через π ортопроектор, действующий из $\mathbb{R}^n$ на L. Положив $\varphi(U,v)=\{\varphi(u,v)\colon u\in U\}$, введем многозначные отображения

$$W(t,v)=\pi t^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha;\alpha)\varphi(U,v),\qquad W(t)=\bigcap_{v\in V}W(t,v).$$

Условие 1 [Понтрягина]. $\operatorname{dom}W=[0,+\infty)$. В силу предположений о параметрах процесса (7), отображение $W(t)$ является замкнутозначным и измеримым по t. Поэтому, в силу условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [6], в нем существует измеримый селектор $\gamma(\cdot)$, $t\geqslant 0$. Зафиксируем его и введем функцию

$$\xi(t,z^0,\gamma(\cdot))=\pi\sum_{i=0}^{m-1}t^{i-(1-\mu)(m-\alpha)}E_{1/\alpha}(At^\alpha;i-(1-\mu)(m-\alpha)+1)z_i^0+\int\limits_0^t\gamma(t-\tau)\,d\tau.$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{R}(t,\tau,v)=\{\rho\geqslant 0\colon [W(t-\tau,v)-\gamma(t-\tau)]\bigcap\rho[M(t)-\xi(t,z^0,\gamma(\cdot))]\neq\varnothing\}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\rho(t,\tau,v)=\sup\{\rho\colon \rho\in\mathfrak{R}(t,\tau,v)\}.$$

Функцию $\rho(t,\tau,v)$ называют разрешающей [5].

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{T}(z^0,\gamma(\cdot))=\left\{t\in\mathbb{R}_+\colon \inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\int\limits_0^t\rho(t,\tau,v(\tau))d\tau\geqslant 1\right\},$$

где Ω_V — совокупность измеримых функций, принимающих значения из области V. Полагая $\mathfrak{T}(z^0,\gamma(\cdot))\neq\varnothing$, зафиксируем в нем элемент T и сформулируем два условия.

Условие 2. $\Re(T,\tau,v) = [0,\rho(T,\tau,v)] \quad \forall\,\tau \in [0,T],\ v \in V.$

Условие 3. $\inf\limits_{v(\cdot)\in\Omega_V} \int\limits_0^T \rho(T,\tau,v(\tau))\,d\tau = \int\limits_0^T \inf\limits_{v\in V} \rho(T,\tau,v)\,d\tau.$

Теорема 1. *Пусть для игровой задачи* (7), (8), *где конфликтно управляемый процесс содержит производные Хильфера, выполнено условие Понтрягина, $M = \operatorname{co} M$, причем для начального состояния z^0 и селектора $\gamma(\cdot)$, $\gamma(t) \in W(t)$, $t \geqslant 0$, множество $\mathfrak{T}(z^0,\gamma(\cdot)) \neq \varnothing$ и $T \in \mathfrak{T}(z^0,\gamma(\cdot))$. Тогда, если для T выполнены условия 2 и 3, то траектория процесса* (7) *может быть приведена на множество* (8) *в момент T с помощью некоторого контрууправления.*

Колебательные процессы с дробным демпфированием. При описании физических явлений и процессов, как правило, используется производная Капуто, соответствующая типу $\mu = 1$, поскольку в таком случае начальные условия имеют ясную физическую интерпретацию. Рассмотрим уравнение Багли–Торвика, описывающее колебания твердой пластины, погруженной в ньютоновскую жидкость [7], с производной в смысле Капуто

$$ay''(t) + bD^{(3/2)}y(t) + cy(t) = u(t) - v(t), \tag{9}$$

где u, v — управления первого и второго игроков, соответственно, такие, что $|u| \leqslant r$, $r > 1$, $|v| \leqslant 1$, с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'.$$

Обозначим $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = D^{(1/2)}y(t)$, $z_3(t) = y'(t)$, $z_4(t) = D^{(3/2)}y(t)$. Можно показать, что $D^{(1/2)}z_1 = z_2$, $D^{(1/2)}z_2 = z_3$, $D^{(1/2)}z_3 = z_4$, $D^{(1/2)}z_4 = y''$ и данное уравнение эквивалентно системе

$$D^{(1/2)}z = Az + B(u - v), \tag{10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & 0 & 0 & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix},$$

с начальными условиями

$$z(0) = z^0 = (y_0, 0, y_0', 0)^*,$$

где звездочка обозначает транспонирование.

В силу (6), решение данной системы задается формулой

$$z(t) = E_2(A\sqrt{t};1)z^0 + \int\limits_0^t E_2\left(A\sqrt{t-\tau};\frac{1}{2}\right)B\frac{u(\tau)-v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Будем полагать, что первый игрок стремится привести систему в состояние $z_1 = 0$, а второй препятствует этому.

Исследование разрешающей функции для определения гарантированного времени окончания игры в общем случае является трудной задачей, так как зависит от конкретного вида обобщенных матричных функций Миттаг–Леффлера $E_2(A\sqrt{t};1)$ и $E_2(A\sqrt{t};1/2)$. Однако в некоторых частных случаях задача упрощается.

Например, положим в уравнении (9) $c = 0$. В таком случае, применяя описанную выше схему метода разрешающих функций, получим, что время окончания игры может быть определено из уравнения

$$\frac{e^{p^2 t}}{p^4}\operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^4} - \frac{2\sqrt{t}}{p^3\sqrt{\pi}} - \frac{t}{p^2} - \frac{4\sqrt{t^3}}{3p\sqrt{\pi}} = \frac{a|y_0 + ty_0'|}{r-1}.$$

Здесь $p = \dfrac{b}{a}$, $\operatorname{erfc}(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_z^\infty e^{-t^2}dt$ — дополнительная функция ошибок.

Данное уравнение всегда имеет решение, поскольку при $t = 0$ его левая часть равна нулю и имеет скорость роста $O(t^{3/2})$, в то время как правая часть в начальный момент времени положительна и растет линейно по t.

Работа выполнена при поддержке украинско-российского проекта ДФФД – Ф 40.1/021.

1. *Hilfer R.* Fractional time evolution // Fraction. Calculus, Applications in Physics. – Singapore: World Scientific, 2000. – P. 87–130.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. *Chikrii A. A., Matychyn I. I.* Game problems for fractional-order systems // New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. New York: Springer, 2010. – P. 233–241.
4. *Чикрий А. А., Матичин И. И.* Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 3. – С. 262–278.
5. *Chikrii A. A.* Conflict-controlled processes. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 424 p.
6. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston: Birkhäuser, 1990. – 461 p.
7. *Bagley R., Torvik P.* On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials // J. Appl. Mech. – 1984. – No 51. – P. 294–298.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.11.2010

I. I. Matychyn

Control over systems with fractional derivatives under conflict conditions

A problem of control over quasilinear processes with fractional derivatives under counteraction conditions is treated. Hilfer fractional derivatives including classical Riemann-Liouville derivatives and regularized Caputo derivatives are studied. Representations of solutions to such systems are derived, which allowed obtaining a guaranteed result in approaching the given target set by a trajectory within the method of resolving functions. The qualitative results are illustrated by an example with the Bagley–Torvik equation describing fractionally damped oscillations.