

Численный расчет акустического поля эоловых тонов*(Представлено академиком НАН Украины В. Т. Гринченко)*

Запропоновано метод розрахунку акустичних характеристик еолових тонів. Метод базується на припущенні, що звук, який генерується потоком, не впливає на характеристики потоку. Розраховано гідродинамічні та акустичні характеристики потоку, що обтікає круговий циліндр.

Звуки, возникающие при обтекании потоком удлиненных тел, таких, например, как струны, тросы, длинные стержни, высокие трубы и т. д., называются эоловыми тонами. История изучения эоловых тонов подробно изложена в [1, 2]. Известно, что возникновение эоловых тонов связано с колебаниями подъемной силы, действующей на обтекаемое тело, и его лобового сопротивления. В 1956 году О. М. Phillips [3] предположил, что подъемную силу $F(t)$, действующую на цилиндрический стержень в потоке, можно приближенно представить как некоторую действующую на единицу длины стержня гармоническую силу

$$F(t) \approx \frac{1}{2} \beta d \rho V^2 \exp(-i[\omega t + \varphi]), \quad (1)$$

где V — скорость набегающего потока; ρ — плотность среды; d — диаметр цилиндрического стержня; ω — круговая частота эолового тона; $0,5 \leq \beta \leq 2$ — константа, связанная с зависимостью подъемной силы от степени турбулентности потока и зависимостью фазы φ от длины стержня. Используя приближение (1), М. Е. Голдстейн [4] предложил следующую приближенную формулу для оценки интенсивности эоловых тонов на единицу длины стержня:

$$I \approx \beta^2 \text{St}^2 \frac{17d\rho V^6}{32r^2 c^3}. \quad (2)$$

Здесь St — число Струхала; c — скорость распространения звука в среде; r — расстояние от стержня до точки наблюдения. Формула (2) носит сугубо оценочный характер, поскольку получена на основе ряда упрощающих предположений. Кроме того, чтобы использовать формулу (2), необходимо заранее знать эмпирический коэффициент β .

Целью настоящей работы является получение более строгих оценок акустических характеристик эоловых тонов на основе численного решения уравнения Навье–Стокса и последующего использования решения уравнения Гельмгольца.

Идея метода. В основу предлагаемого метода оценки акустических характеристик эоловых тонов положим два принципиальных предположения, а именно: мощность звука, порожденного потоком, набегающим на препятствие, существенно меньше мощности набегающего потока; порожденный потоком звук не влияет на характер самого потока. Кроме того, будем полагать, что цилиндрический стержень имеет бесконечную длину, что позволяет рассматривать задачу как плоскую.

Задачу определения акустических характеристик эоловых тонов можно разделить на два этапа. На первом этапе рассматривается гидродинамическая задача. В силу того, что

размеры источника звука малы по сравнению с длиной звуковой волны, гидродинамическую задачу можно рассматривать в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. С этой целью численно решаем нестационарную систему уравнений Навье–Стокса. На основе полученного решения определяем частоту процесса периодического срыва вихрей с поверхности стержня и изменение давления на поверхности стержня в течение одного периода этого процесса. После этого можно перейти ко второму этапу и рассмотреть акустическую задачу. Распределение давления на поверхности стержня в течение одного периода при постановке акустической задачи можно рассматривать как граничное условие. Тогда решение задачи об определении поля эоловых тонов сводится к решению хорошо известной плоской задачи об определении поля излучения цилиндра, на поверхности которого задано некоторое периодически изменяющееся распределение давления. При этом, если числа Маха малы, то движением потока можно пренебречь и считать, что звук распространяется так же, как в неподвижной среде.

Решение гидродинамической задачи. В силу описанного выше подхода задача нестационарного обтекания твердого кругового цилиндра формулируется в рамках модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. Такой процесс описывается нестационарной системой уравнений Навье–Стокса. Векторное и покомпонентное представление этих уравнений можно найти в учебной литературе. Для обезразмеривания уравнений движения за масштаб длины принимался диаметр цилиндра d , а за масштаб скорости — скорость равномерного потока V на достаточно большом удалении от цилиндра. Тогда масштабом времени будет величина d/V , а масштабом давления — удвоенный скоростной напор ρV^2 . Основным параметром такой задачи, входящим в уравнения движения, является число Рейнольдса $Re = Vd/\nu$, где ν — кинематическая вязкость среды.

В качестве расчетной области был выбран квадрат со стороной $40d$, а цилиндр располагался в центре квадрата. Граничные условия формулировались следующим образом. Для скорости на границе цилиндра ставилось условие прилипания $U = 0$. На входе в расчетную область (левая граница) задавался равномерный поток. На верхней и нижней границах расчетной области формулировалось условие плоскости симметрии, т. е. нулевые значения для нормальной компоненты и равенство нулю нормального градиента для касательной. На выходе из расчетной области (правая граница) ставились “мягкие” граничные условия типа линейной экстраполяции, соответствующие равенству нулю нормального градиента скорости. Для давления условие равенства нулю нормального градиента формулировалось по всей границе расчетной области.

Алгоритм численного решения сформулированной задачи детально описан в [5] и использован в [6, 7] для численного моделирования течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Описанный алгоритм решения основан на применении метода конечных объемов. Для дискретизации дифференциальных операторов, входящих в уравнения движения, использовались схемы второго порядка, для дискретизации расчетной области — неортогональная сетка со сгущением узлов вблизи поверхности цилиндра. Представленные в данной работе результаты получены на сетке с 230 400 контрольных объемов.

Обтекание кругового цилиндра потоком жидкости рассматривалось в большом числе экспериментальных и расчетных работ [8]. Известно, что ламинарное течение за цилиндром, в зависимости от значения числа Рейнольдса, может иметь три режима: безотрывное стационарное течение, стационарный отрыв и периодическое отрывное течение. Безотрывный режим реализуется при числе Рейнольдса, не превышающем порогового значения $Re \approx 5$. При увеличении числа Рейнольдса под действием градиента давления и вязких сил лами-

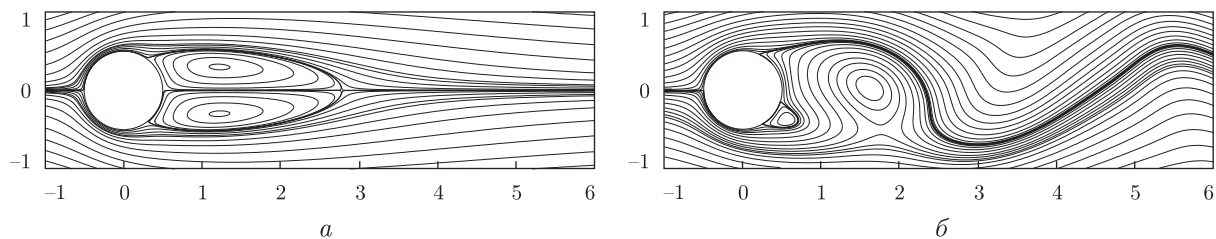


Рис. 1. Мгновенные линии тока: $a - \text{Re} = 40$; $b - \text{Re} = 100$

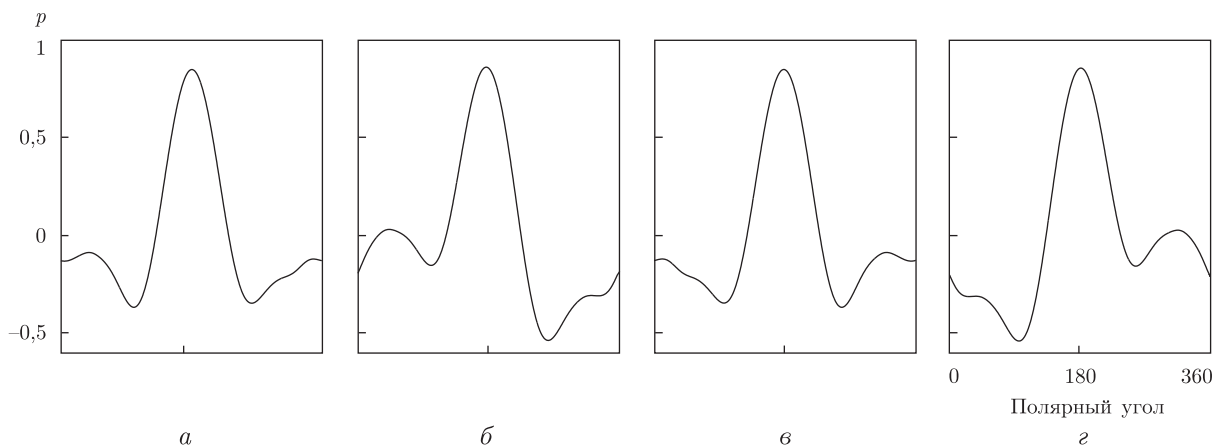


Рис. 2. Распределение давления на поверхности цилиндра ($\text{Re} = 200$): $a - t = 0$; $b - t = T/4$; $v - t = T/2$; $z - t = 3T/4$

нарный пограничный слой отрывается от поверхности цилиндра, за цилиндром образуется пара рециркуляционных вихрей. С целью верификации используемых численных методов нами были рассчитаны значения коэффициента лобового сопротивления и длины отрывной зоны, измеряемой от задней критической точки. Следует отметить хорошее совпадение с результатами, приведенными в работе [8], значения которых отличаются от наших менее чем на один процент. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса размеры симметричной вихревой пары, образовавшейся за цилиндром, растут и вихри вытягиваются вдоль направления потока. При этом течение остается стационарным до достижения числом Рейнольдса критического значения $\text{Re} \approx 40$.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса ($\text{Re} > 40$) течение становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям. При $\text{Re} = 50$ в следе за цилиндром возникают периодические колебания, которые усиливаются с ростом числа Рейнольдса. Когда $\text{Re} = 60$, течение характеризуется периодическим срывом вихрей то с одной, то с другой стороны от кормовой точки цилиндра, которые дрейфуют вниз по потоку, образуя вихревую дорожку Кармана. Сказанное выше иллюстрирует рис. 1, на котором приведены линии тока для двух значений числа Рейнольдса. В диапазоне $40 \lesssim \text{Re} \lesssim 300$ реализуется устойчивый ламинарный режим течения, при котором нет необходимости учитывать влияние турбулентных пульсаций. В данной работе мы используем метод прямого численного моделирования также для $\text{Re} = 400$ и показываем, что точность полученных результатов является приемлемой.

На рис. 2 представлено изменение распределения давления p по поверхности цилиндра на протяжении одного периода при $\text{Re} = 200$. Полярная угловая координата отсчитывается от положительного направления оси X , т. е. от кормовой точки цилиндра. Следует отме-

тить, что при увеличении числа Рейнольдса амплитуда осцилляций давления на поверхности цилиндра растет.

Периодический характер течения в следе за цилиндром приводит к тому, что силы, приложенные к цилиндру, также изменяются периодически во времени. Причем частота колебания действующей на цилиндр силы в направлении течения вдвое выше частоты колебания этой силы в направлении, перпендикулярном течению. Следует отметить, что с ростом числа Рейнольдса амплитуда колебаний продольной составляющей C_x растет быстрее, чем амплитуда колебаний поперечной составляющей C_y . Однако даже при $Re = 400$ амплитуда C_x остается на порядок меньше, чем амплитуда C_y . Нами были также рассчитаны значения числа Струхала $St = d/(VT)$. Наши результаты при $Re = 50; 100; 200$ отличаются от результатов работы [8] не более, чем на 3%. При $Re = 400$ отклонение расчетных данных от экспериментальных все еще не превышает 10% и, следовательно, применение методов прямого численного моделирования на используемой сетке можно считать приемлемым.

Расчет звукового поля. Из численного решения соответствующей задачи гидромеханики мы имеем распределение давления на поверхности цилиндра, которое периодически изменяется во времени с периодом T . Следуя идее, изложенной выше, полагаем, что эти пульсации давления на поверхности цилиндра возбуждают звуковые колебания в окружающей среде [2].

Тогда звуковое поле вне цилиндра может быть найдено из соответствующей граничной задачи для волнового уравнения в виде ряда Фурье по временной координате:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} p_n(r, \phi), \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ — угловая частота; f — частота эоловых тонов, а $p_n(r, \phi)$ — решение соответствующего уравнения Гельмгольца, которое может быть представлено в виде ряда Фурье по угловой координате

$$p_n = \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi] H_m^{(1)}(k_n r), \quad (4)$$

где $k_n = n\omega/c$ — волновое число; c — скорость звука в среде; $H_m^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода. Неизвестные коэффициенты решения (4) определяются из граничного условия на поверхности цилиндра.

Расчет течения в предыдущих разделах мы проводили для безразмерных величин. Для расчета же звукового поля переходим к размерным величинам. Параметры среды выбираем такие, как для воздуха при температуре 20° С: $\rho = 1,204$ кг/м³, $\nu = 1,51 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $c = 332$ м/с. Диаметр цилиндра примем $d = 1$ см. Масштабы для скорости, времени и давления описаны выше, а именно V , d/V , ρV^2 , соответственно.

Проведенные нами расчеты показали, что отношение полной акустической мощности эолового тона к мощности потока, набегающего на цилиндр (иными словами, КПД излучателя), имеет порядок 10^{-8} . Столь малые значения КПД излучателя и интенсивности излучаемого звука говорят о справедливости заложенных в основу нашей модели основных положений акустической аналогии Лайтхилла о том, что обратным влиянием звука на характеристики потока среды можно пренебречь.

Следует отметить, что приближенная формула Филлипса (1) для вычисления амплитуды колебания подъемной силы $\max |\tilde{F}_y| \sim V^2$ не подтверждается при малых числах Рей-

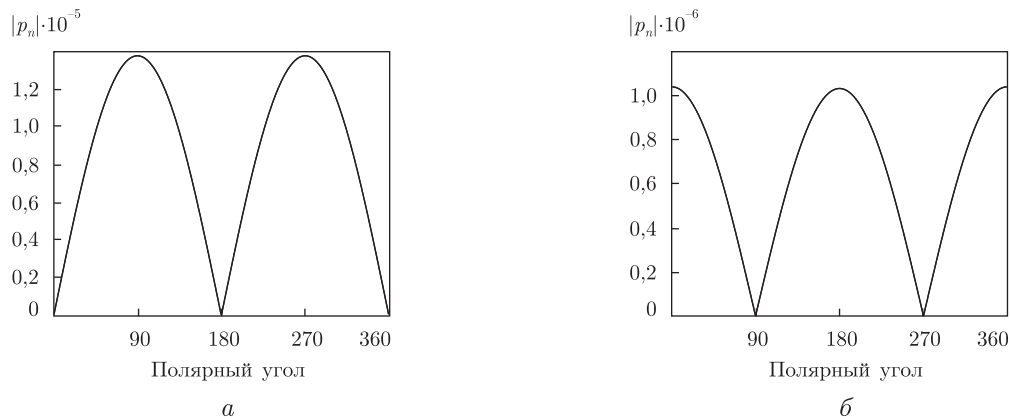


Рис. 3. Модуль первых двух гармоник давления p_n на расстоянии 1 м от центра цилиндра ($Re = 200$): а — $|p_n|$ при $n = \pm 1$; б — $|p_n|$ при $n = \pm 2$

нольдса. Лишь при $Re = 400$ данная приближенная формула дает приемлемый результат. В то время как при $Re = 50$ значения, которые дает приближенная формула (1), отличаются от расчетных данных более чем на порядок. Вообще видно, что при приближенном представлении амплитуды пульсирующей подъемной силы в виде степенной функции от скорости набегающего потока $\max |\tilde{F}_y| \sim V^q$ показатель степени зависит от числа Рейнольдса $q = f(Re)$, причем q принимает значения, близкие к 2 лишь при достаточно больших числах Рейнольдса. Аналогичный вывод можно сделать и по отношению к приближенной формуле для вычисления интенсивности звука в виде шестой степени скорости набегающего потока $I \sim V^6$. Такая приближенная формула дает неточные результаты, особенно при небольших числах Рейнольдса. При представлении же интенсивности звука в виде степенной функции от скорости потока $I \sim V^s$ показатель степени также является функцией числа Рейнольдса $s = f(Re)$.

На рис. 3 приведен модуль первых двух гармоник акустического давления p_1 и p_2 на расстоянии 1 м от центра цилиндра для случая $Re = 200$. Видно, что первая гармоника p_1 , соответствующая колебаниям с периодом T , представляет собой колебания в вертикальном направлении. В то время как вторая гармоника p_2 , соответствующая колебаниям с периодом $T/2$, является колебаниями в горизонтальном направлении. Такой результат кажется вполне естественным, если принять во внимание, что период колебания лобового сопротивления равен $T/2$, а период колебания подъемной силы — T .

В силу описанных выше причин автоколебательный процесс представляет собой акустический источник (эолового звука) дипольного типа. Для первой гармоники p_1 акустическая ось источника перпендикулярна направлению потока. В то время как для второй гармоники p_2 акустическая ось направлена вдоль потока. На рис. 4 изображена нормированная диаграмма направленности порождаемого потоком звука. Следует отметить, что с ростом числа Рейнольдса вклад гармоники p_2 , вызванной осцилляцией силы лобового сопротивления, возрастает. Если при $Re = 50$ отношение амплитуд первой и второй гармоник составляет 63,37, то при $Re = 400$ — лишь 8,75.

Вернемся к выражению (4) и обратим внимание на тот факт, что эта сумма по сути содержит бесконечный набор акустических источников различных типов — диполь ($m = 1$), квадруполь ($m = 2$), а также мультиполи высших порядков ($m > 2$). Это позволяет, во-первых, определить, какие типы источников порождает набегающий на цилиндр поток, а,



Рис. 4. Нормированная диаграмма направленности эоловых тонов, возникающих за счет осцилляций подъемной силы и силы сопротивления: *a* – $Re = 100$; *б* – $Re = 400$

во-вторых, оценить вклад каждого источника в общее звуковое поле. Нами были проведены соответствующие расчеты и выяснено, что доминирующим является источник дипольного типа. Например, при $Re = 100$ давление, создаваемое источником квадрупольного типа, примерно на два порядка меньше, чем дипольного. А вклад мультипольных источников высшего порядка, в свою очередь, на три порядка меньше вклада квадрупольного.

1. *Воек И. В.* Физический взгляд на природу эоловых тонов // Акуст. вісник. – 2007. – **10**, № 2. – С. 22–32.
2. *Воек И. В., Гринченко В. Т.* Звук, рожденный потоком. – Киев: Наук. думка, 2010. – 221 с.
3. *Phillips O. M.* The intensity of Aeolian tones // J. Fluid Mech. – 1956. – **1**, pt. 6. – P. 607–624.
4. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. – Москва: Машиностроение, 1981. – 294 с.
5. *Малюга В. С.* Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения // Прикл. гідромех. – 2010. – **12**, № 4. – С. 45–62.
6. *Воек И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С.* Особенности движения среды в каналах со стенозами // Там само. – 2009. – **11**, № 4. – С. 17–30.
7. *Воек И. В., Малюга В. С.* Численное моделирование течения в канале с двумя последовательными сужениями (стенозами) // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 53–58.
8. *Приходько А. А., Редчиц Д. А.* Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье–Стокса // Прикл. гідромех. – 2005. – **7**, № 1. – С. 56–71.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 30.11.2010

V. S. Malyuga

Numerical calculation of the acoustic field of Aeolian tones

The method for calculation of acoustic characteristics of Aeolian tones is suggested. It is based on the assumption that the sound generated by a flow has no effect on the flow characteristics. Hydrodynamic and acoustic characteristics of the flow circumfluent a circular cylinder are calculated.