Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

А. А. Акбергенов, Г. П. Пелюх

Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних різницевих рівнянь

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Встановлено умови існування неперервних розв'язків одного класу нелінійних різницевих рівнянь і розроблено метод їх побудови.

У роботі досліджується структура множини неперервних розв'язків системи нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}^+$, Λ — стала дійсна $(n \times n)$-матриця, $f \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, в околі тривіального розв'язку $x(t) = 0 (f(t,0) = 0)$. При різних припущеннях відносно матриці Λ і вектор-функції $f(t,x)$ це питання вивчалося багатьма математиками і зараз досить добре досліджене [1–7]. Незважаючи на це в ряді випадків вдається отримати нові результати, які суттєво доповнюють і розвивають отримані раніше. Саме це є основною метою даної роботи, в якій система рівнянь (1) розглядається при таких припущеннях:

1) вектор-функція $f(t,x)$ є неперервною в області $D \colon t \in \mathbb{R}^+$, $|x| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \leqslant b$, $f(t,0) = 0$, і задовольняє співвідношення

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \leqslant L(|x'| + |x''|)^{\alpha} |x' - x''|,$$

де $|f| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i|$, L, $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $(t,x'), (t,x'') \in D$;

2) $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_n| < 1$,

$$|\lambda_1|^{-1} |\lambda_n|^{1+\alpha} \geqslant 1.$$

Внаслідок умови 2 доведена в [7] теорема про лінеаризацію системи рівнянь (1) не має місця і, отже, актуальною є задача про побудову неперервних розв'язків системи рівнянь (1) і дослідження їх властивостей.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді в деякій області* $D^* \subset D$ *існує заміна змінних*

$$
\begin{aligned}
&x_i(t) = x_i^{(1)}(t),\\
&x_n(t) = x_n^{(1)}(t) + \gamma^1\big(t, x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t)\big), \qquad i = 1, \ldots, n-1,
\end{aligned} \tag{2}
$$

де функція $\gamma^1(t, x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t))$ *є неперервною при* $t \in \mathbb{R}^+$, $|x_i^{(1)}| \leqslant b^* < b$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\gamma^1(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$, *та такою, що для довільних* $(t, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-1})$, $(t, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_{n-1}) \in D^*$ *виконується співвідношення*

$$
|\gamma^1(t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}) - \gamma^1(t, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{n-1})| \leqslant K\left(\sum_{s=1}^{n-1}|\overline{x}_s| + \sum_{s=1}^{n-1}|\widetilde{x}_s|\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n-1}|\overline{x}_i - \widetilde{x}_i|\right), \tag{3}
$$

де $K = \mathrm{const} > 0$, *яка приводить систему рівнянь* (1) *до вигляду*

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(1)}(t+1) = \lambda_1 x_1^{(1)}(t) + f_1^{(1)}(t, x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t), x_n^{(1)}(t)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{n-1}^{(1)}(t+1) = \lambda_{n-1} x_{n-1}^{(1)}(t) + f_{n-1}^{(1)}(t, x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t), x_n^{(1)}(t)),\\
&x_n^{(1)}(t+1) = \lambda_n x_n^{(1)}(t) + f_n^{(1)}(t, x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t), x_n^{(1)}(t)),
\end{aligned} \tag{4}
$$

де функції $f_i^{(1)}(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *є неперервними в області* D^*, *задовольняють умову 1 відносно* $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ *та виконується співвідношення* $f_n^{(1)}(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, 0) \equiv 0$.

Доведення. Оскільки система різницевих рівнянь (1) має вигляд

$$
\begin{aligned}
&x_1(t+1) = \lambda_1 x_1(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t), x_n(t)),\\
&x_2(t+1) = \lambda_2 x_2(t) + f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t), x_n(t)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{n-1}(t+1) = \lambda_1 x_{n-1}(t) + f_{n-1}(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t), x_n(t)),\\
&x_n(t+1) = \lambda_n x_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t), x_n(t)),
\end{aligned} \tag{5}
$$

то, виконуючи в (5) заміну змінних (2), отримуємо

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(1)}(t+1) = \lambda_1 x_1^{(1)}(t) + f_1(t, x_1^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t), x_n^{(1)}(t) + \gamma^1(t, x_1^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t))),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{n-1}^{(1)}(t+1) =\\
&\qquad = \lambda_{n-1} x_{n-1}^{(1)}(t) + f_{n-1}(t, x_1^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t), x_n^{(1)}(t) + \gamma^1(t, x_1^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t))),\\
&x_n^{(1)}(t+1) =\\
&\qquad = \lambda_n x_n^{(1)}(t) + \lambda_n \gamma^1(t, x_1^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t)) - \gamma^1(t+1, x_1^{(1)}(t+1), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t+1)) +\\
&\qquad + f_n(t, x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t), x_n^{(1)}(t) + \gamma^1(t, x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t))).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Система рівнянь (6) матиме вигляд (4), якщо функції $f_i^{(1)}(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, визначити таким чином:

$$\begin{aligned}
&f_i^{(1)}(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) = f_i(t, x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(1)} + \gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})),\\
&\qquad i = 1, \ldots, n-1,\\
&f_n^{(1)}(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) = \lambda_n \gamma^1(t, x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}) -\\
&\qquad - \gamma^1(t+1, x_1^{(1)}(t+1), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t+1)) + f_n(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(1)} +\\
&\qquad + \gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})).
\end{aligned} \tag{7}$$

Безпосередньо із (7) випливає, що для доведення теореми достатньо довести існування розв'язку $\gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})$ функціонального рівняння

$$\begin{aligned}
&\gamma^1(t+1, \lambda_1 x_1^{(1)} + f_1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, \gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})), \ldots,\\
&\lambda_{n-1} x_{n-1}^{(1)} + f_{n-1}(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, \gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})) =\\
&\qquad = \lambda_n \gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}) + f_n(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, \gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})).
\end{aligned} \tag{8}$$

Розв'язок рівняння (8) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо таким чином:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}) = 0,\\
&\gamma_m^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}) =\\
&\qquad = \lambda_n^{-1} \gamma_{m-1}^1(t+1, \lambda_1 x_1^{(1)} + f_1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, \gamma_{m-1}^1(t, x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})),\\
&\qquad \ldots, \lambda_{n-1} x_{n-1}^{(1)} + f_{n-1}(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, \gamma_{m-1}^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})) -\\
&\qquad - \lambda_n^{-1} \cdot f_n(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, \gamma_{m-1}^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})), \qquad m \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Використовуючи умови теореми та співвідношення (9), можна показати, що при достатньо малому b^* функції $\gamma_m^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})$, $m = 0, 1, \ldots$, є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$, $|x_i^{(1)}| \leqslant b^* < b$, $i = 1, \ldots, n-1$, і задовольняють умови

$$|\gamma_m^1(t, \widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_{n-1}) - \gamma_m^1(t, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{n-1})| \leqslant K \left(\sum_{s=1}^{n-1} |\widehat{x}_s| + \sum_{s=1}^{n-1} |\widetilde{x}_s| \right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\widehat{x}_i - \widetilde{x}_i| \right), \tag{10}$$

$$|\gamma_m^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}) - \gamma_{m-1}^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})| \leqslant M \cdot \Delta^{m-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |x_k^{(1)}| \right)^{1+\alpha}, \tag{11}$$

де $(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_{n-1}^{(1)})$, $(t, \widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots \widehat{x}_{n-1})$, $(t, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_{n-1}) \in D^*$, K, M — деякі додатні сталі, $0 < \Delta < 1$.

Безпосередньо з (11) випливає, що при $t \geqslant 0$, $|x_i^{(1)}| \leqslant b_*$ послідовність неперервних функцій $\gamma_m^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})$, $m \geqslant 0$, рівномірно збігається до деякої неперервної функції $\gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})$. Переходячи в (9), (10) до границі при $m \to \infty$, легко показати, що функція $\gamma^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}) = \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_m^1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})$, є розв'язком функціонального рівняння (8) і задовольняє умову (3).

Теорема доведена.

Отже, виконуючи перетворення (2), ми отримуємо систему рівнянь (4), яка при $x_n^{(1)}(t) = 0$ має вигляд

$$x^{(1)}(t+1) = \Lambda_{n-1} x^{(1)}(t) + f^{(1)}(t, x^{(1)}, 0), \tag{12}$$

де $\Lambda_{n-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})$.

Зауважимо, що якщо $\overline{x}_i^{(1)}(t)$, $i = 1, \ldots, n-1$, — деякий розв'язок системи (12), то використовуючи (2), розв'язок системи (1) можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} &x_i(t) = \overline{x}_i^{(1)}(t), \\ &x_n(t) = \gamma^1(t, \overline{x}_1^{(1)}(t), \overline{x}_2^{(1)}(t), \ldots, \overline{x}_{n-1}^{(1)}(t)), \qquad i = 1, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{13}$$

При подальшому дослідженні системи (12) може трапитись два випадки: коли виконується або не виконується умова

$$|\lambda_1|^{-1} |\lambda_{n-1}|^{1+\alpha} < 1. \tag{14}$$

Якщо ця умова не виконується, то до системи (12) можна знову застосувати теорему 1 і звести її дослідження до дослідження системи $(n-2)$-го порядку. Продовжуючи цей процес, ми можемо побудувати послідовність многовидів $\gamma_j(t, x_1, \ldots, x_{n-j})$, $j = 1, \ldots, k$, і відповідну їм послідовність замін змінних

$$\begin{aligned} &x_i^{(1)}(t) = x_i^{(2)}(t), \\ &x_{n-1}^{(1)}(t) = x_{n-1}^{(2)}(t) + \gamma^2(t, x_1^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t), \ldots, x_{n-2}^{(2)}(t)), \qquad i = 1, \ldots, n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_i^{(k-1)}(t) = x_i^{(k)}(t), \\ &x_{n-k+1}^{(k-1)}(t) = x_{n-k+1}^{(k)}(t) + \gamma_k(t, x_1^{(k)}(t), \ldots, x_{n-k}^{(k)}(t)), \qquad i = 1, \ldots, n-k, \end{aligned} \tag{15}$$

таку, що, поклавши послідовно

$$x_i^{(l)}(t) = 0, \qquad i = n, \ldots, n-k+1, \qquad l = 1, \ldots, k, \tag{16}$$

ми отримаємо систему $(n-k)$-го (k — деяке ціле число, $k \geqslant 1$) порядку

$$x^{(k)}(t+1) = \Lambda_{n-k} x^{(k)}(t) + f^{(k)}(t, x^{(k)}, 0, \ldots, 0), \tag{17}$$

де $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-k}^{(k)})$, $\Lambda_{n-k} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k})$, $f^{(k)} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, для якої уже буде виконуватись умова

$$|\lambda_1|^{-1} \cdot |\lambda_{n-k}|^{1+\alpha} < 1. \tag{18}$$

Для системи рівнянь (17) має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 2 та* (18). *Тоді в деякій області* $D^* \subset D$ *існує заміна змінних*

$$x^{(k)}(t) = k(t, y(t)) = y(t) + \chi(t, y(t)), \tag{19}$$

де вектор-функція $\chi(t, y(t))$ *є неперервною при* $t \in \mathbb{R}$, $|y| \leqslant b^* < b$, $\chi(t, 0) = 0$, *і такою, що для довільних* (t, y') *та* (t, y'') *з області* D^* *виконується співвідношення*

$$|\chi(t, y') - \chi(t, y'')| \leqslant K(|y'| + |y''|)^\alpha |y' - y''|, \tag{20}$$

де $K = \mathrm{const}$, *яка приводить систему рівнянь* (17) *до вигляду*

$$y(t+1) = \Lambda_k y(t). \tag{21}$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 із [7].

Оскільки загальний неперервний розв'язок системи рівнянь (21) має вигляд

$$y_i(t) = |\lambda_i|^t \omega_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n-k, \tag{22}$$

де $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n-k$, — довільні функції, що задовольняють умови

$$\omega_i(t+1) = \omega_i(t) \operatorname{sign} \lambda_i, \qquad i = 1, \ldots, n-k, \tag{23}$$

то з урахуванням (15), (16), (19) та (22) можна побудувати сім'ю неперервних розв'язків системи (1), що залежить від $n-k$ довільних функцій, які задовольняють умови (23). Більше того, кожен розв'язок $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, із цієї сім'ї визначається формулами

$$\begin{aligned}
&x_i(t) = x_i^{(1)}(t), \qquad i = 1, \ldots, n-1,\\
&x_n(t) = \gamma_1(x_1^{(1)}(t), \ldots, x_{n-1}^{(1)}(t)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_i^{(k-1)}(t) = x_i^{(k)}(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-k,\\
&x_{n-k+1}^{(k-1)}(t) = \gamma_k(x_1^{(k)}(t), \ldots, x_{n-k}^{(k)}(t)),\\
&x^{(k)}(t) = y(t) + \chi(t, y(t)),
\end{aligned}$$

де $x^{(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), \ldots, x_{n-k}^{(k)}(t))$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n-k}(t))$ і $y_i(t)$, $i = 1 \ldots, n-k$, визначаються співвідношеннями (22).

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 304 с.
2. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1947. – 392 с.
3. *Tokano B. K.* Solutions containing arbitrary periodic functions of systems of nonlinear difference equations // Funkc. ekvacioj. – 1973. – **16**, No 2. – P. 137–164.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1970. – 720 с.
5. *Пелюх Г. П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 936–953.

6. *Пелюх Г. П.* О линеаризации систем нелинейных функционально-разностных уравнений в окрестности положения равновесия // Доп. НАН України. – 2009. – № 9. – С. 36–41.
7. *Пелюх Г. П.* Исследование структуры множества непрерывных решений систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 1. – С. 99–108.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 23.05.2012

А. А. Акбергенов, Г. П. Пелюх

Построение непрерывных решений одного класса систем нелинейных разностных уравнений

Установлены условия существования непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений и разработан метод их построения.

A. A. Akbergenov, G. P. Pelyukh

Constructing the continuous solutions for one class of systems of nonlinear difference equations

We have obtained conditions for the existence of continuous solutions for one class of systems of nonlinear difference equations with continuous argument and developed a method of their construction.