

Академик НАН Украины В. Д. Кубенко

Осесимметричная задача нестационарного вдавливания твердого тела в упругое полупространство (постоянная область контакта)

Решается осесимметричная задача для упругого полупространства, по поверхности которого в определенный момент времени происходит удар твердым телом с затупленной лобовой поверхностью. Конкретно рассмотрен случай нестационарного вдавливания торцом кругового цилиндра. Принята упрощенная формулировка граничных условий на поверхности полупространства. Получены аналитические выражения для характеристик напряженного состояния в произвольной точке упругого массива.

Работа посвящена построению решения осесимметричной задачи удара затупленным телом по поверхности упругого полупространства в рамках следующей упрощенной задачи: в области контакта имеет место равенство перемещений тела и упругой среды, на свободной поверхности приняты упрощенные граничные условия — отсутствие нормального перемещения. Кроме того, касательное напряжение отсутствует всюду, а закон движения ударника известен, т. е. фактически рассматривается случай нестационарного вдавливания. Решение задачи построено для конкретной формы проникающего тела: ударник конечных размеров с плоским передним срезом (удар торцом цилиндра). Построено аналитическое решение, позволяющее определить параметры напряженно-деформированного состояния в произвольной точке среды. Укажем, что решение аналогичной плоской задачи получено в [1] и, как оказалось, ранее в [2].

Рассматривается вертикальный удар о поверхность упругого полупространства затупленным абсолютно твердым телом (штампом), контур лобовой части которого в общем случае задан поверхностью вращения, описываемой гладкой функцией. Скорость внедрения штампа в среду является величиной, значительно меньшей скорости упругих волн в ней. Трение на поверхности взаимодействия тела и среды (области контакта) отсутствует. Геометрия задачи обладает осевой симметрией, и цилиндрическая система координат Oxz , в которой будет вестись исследование, выбирается таким образом, что ось Oz направлена в глубь среды, ось Or — вдоль поверхности полупространства (рис. 1).

Поверхность штампа в общем случае задается функцией $z = f(r)$. Физические свойства материала полупространства будем задавать при помощи упругих постоянных — модуля

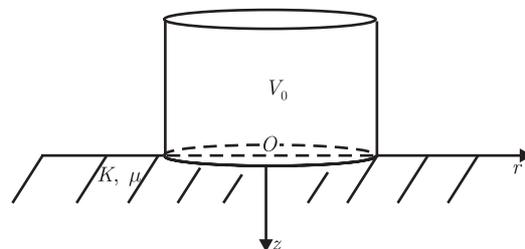


Рис. 1. Нестационарное вдавливание жесткого тела в упругое полупространство

всестороннего сжатия K и модуля сдвига μ и плотности γ . Упругой среде с постоянными K , μ , γ будем также ставить в соответствие акустическую среду с теми же параметрами K , ρ и $\mu = 0$. Через c_0 обозначим скорость звука в акустической среде. Таким образом, скорости распространения волн определяются формулами

$$c_p = \left(\frac{K + 4/3\mu}{\gamma} \right)^{1/2}; \quad c_s = \left(\frac{\mu}{\gamma} \right)^{1/2}; \quad c_0 = \left(\frac{K}{\gamma} \right)^{1/2}.$$

Введем безразмерные переменные и обозначения:

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{K} \quad (i, j = r, z),$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{R},$$

$$\bar{V}_0 = \frac{V_0}{c_0}, \quad \beta = \frac{c_s}{c_0}, \quad \alpha = \frac{c_p}{c_0}; \quad b = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{c_0}, \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{R}.$$

Здесь R — характерный линейный размер штампа; V_0 , w_0 — скорость движения и перемещение штампа; u_i — проекции вектора упругих перемещений; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. Ниже (если не будет оговорено иное) будут использоваться только безразмерные обозначения, поэтому черту над ними опускаем.

Движение упругой среды в осесимметричном случае описывается двумя скалярными волновыми потенциалами Φ и Ψ , удовлетворяющими уравнениям [3],

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad \Delta \Psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Физические величины (перемещения, напряжения) выражаются через потенциалы Φ и Ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}; & u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \\ \sigma_{zz} &= \left(1 - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \right); \\ \sigma_{rr} &= \left(1 - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^2 \partial z} \right); \\ \sigma_{rz} &= 2\beta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{2\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Затупленность лобовой поверхности штампа и малые глубины проникания в среду позволяют формулировать граничные условия на невозмущенной поверхности полупространства при $z = 0$.

Граничные условия при отсутствии трения состоят в равенстве нормального перемещения среды и перемещения тела в области контакта, отсутствии нормального перемещения свободной поверхности среды вне области контакта и нулевом касательном напряжении всюду в плоскости $z = 0$

$$u_z|_{z=0} = \int_0^t V_b(t) dt, \quad 0 \leq r < r^*(t),$$

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad r > r^*(t),$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad r \geq 0.$$

Здесь $r^*(t)$ — радиус области контакта. Первые два условия можно переписать, используя единичную функцию Хевисайда $H(r) = \begin{cases} 1, & r > 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$, так что

$$u_z|_{z=0} = Q(t, r), \quad Q(t, r) = H[r^*(t) - r] \int_0^t V_0(t) dt, \quad (3)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0.$$

Начальные условия для потенциалов Φ и Ψ являются нулевыми, на бесконечности волновые возмущения затухают. Полагаем также, что скорость проникания тела в среду $V_0(t)$ является заданной функцией, т.е. имеет место случай так называемого нестационарного вдавливания.

Напомним, что принятая формулировка в строгом смысле имеет место в случае очень тупых тел и соответствует так называемому сверхзвуковому этапу проникания, в течение которого возмущения в упругой среде не выходят за пределы области контакта, так как ее граница движется со скоростью, превышающей скорость распространения упругих волн. Такая постановка исключает появление особенностей напряженного состояния на границе области контакта. Все же, как показывают выполненные численные расчеты, в некоторых случаях решение “сверхзвуковой” задачи позволяет получить приемлемые оценочные результаты и для более сложной смешанной задачи, в которой возмущения в среде выходят за пределы области контакта. Кроме того, эффективное решение такой задачи может служить ориентиром при разработке численных подходов к решению более сложных краевых задач, к которым сводятся задачи удара.

Решение задачи (1), (3) получим при помощи интегральных преобразований Лапласа по времени t с параметром s и преобразование Бесселя (Ханкеля) порядка 0 по r с параметром ξ [4]. В частности,

$$f^L(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt; \quad f(t) = L^{-1}\{f^L(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{ts} f^L(p) dp;$$

$$f^B(\xi) = B\{f(r)\} = \int_0^\infty f(r)r J_0(r\xi) dr; \quad f(r) = B^{-1}\{f^B(\xi)\} = \int_0^\infty f^B(\xi)\xi J_0(r\xi) d\xi.$$

Здесь L и B — соответственно операторы интегральных преобразований Лапласа и Бесселя; L^{-1} , B^{-1} — операторы обращения; J_0 — цилиндрическая функция Бесселя нулевого индекса [5]; $\delta > 0$. В пространстве изображений по Лапласу и Бесселю получим следующую граничную задачу (в которой начальные условия уже реализованы):

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LB} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LB} = 0, \\
& \frac{\partial \Phi^{LB}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{\beta^2} \Psi^{LB} = Q^{LB}(s, \xi), \quad z = 0, \\
& \frac{\partial \Phi^{LB}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{2\beta^2} \Psi^{LB} = 0, \quad z = 0, \\
& \Phi^{LB} \rightarrow 0, \quad \Psi^{LB} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{4}$$

Общее решение волновых уравнений, затухающее при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\Phi^{LB} = A e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}}; \quad \Psi^{LB} = B e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}. \tag{5}$$

Определяя произвольные постоянные A, B из граничных условий, будем иметь выражение для изображения нормального напряжения

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{LB}(s, \xi, z) = & -\alpha Q^{LB}(s, \xi) \times \\
& \times \left[\frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{s^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - \frac{4\beta^3 \xi^2 \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}{\alpha s^2} e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично можно получить выражения u_z и напряжение сдвига σ_{rz} в изображениях

$$\begin{aligned}
u_z^{LB} = & Q^{LB} \frac{1}{s^2} \left[(s^2 + 2\beta^2 \xi^2) e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - 2\beta^2 \xi^2 e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \right]; \\
\sigma_{rz}^{LB} = & Q^{LB} \frac{s^2 + 2\beta^2 \xi^2}{s^2} \left(e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \right).
\end{aligned}$$

Теперь конкретизируем вид воздействия в первом условии (3). Будем предполагать, что функция $Q(t, r)$ имеет вид

$$Q(t, r) = G(r) \int_0^t H(t) dt. \tag{7}$$

Такой выбор воздействия предполагает, что область контакта постоянна, а вдавливание происходит с постоянной скоростью. Например, в случае индентора с плоским передним срезом функция $G(r)$ имеет вид

$$G(r) = G_0 H(R - r),$$

где R — радиус индентора; $G_0 = \text{const}$.

Для случая (7), имея в виду, что $L[Q(t, r)] = \frac{1}{s^2} G(r)$, из (6) получим выражение для нормального напряжения σ_{zz}^{LF} в изображениях

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{LB}(s, \xi) = & -\alpha G^B(\xi) T^{LB}(s, \xi), \\
T^{LB}(s, \xi) = & \left(1 + 4\beta^2 \frac{\xi^2}{s^2} + 4\beta^4 \frac{\xi^4}{s^4} \right) \frac{e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}}}{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \left(\frac{\xi^2}{s^2} + \beta^2 \frac{\xi^4}{s^4} \right) \frac{e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}}{\sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Если удастся найти функцию $T^L(s, r)$ (т. е. выполнить обращение преобразования Бесселя функции $T^{LF}(s, \xi)$), то обращение этого преобразования для функции $\sigma_{zz}^{LF}(s, \xi)$ можно получить из (8), воспользовавшись теоремой о свертке [2]

$$f^B(\xi)g^B(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\rho)g(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \alpha}) \rho d\rho d\alpha \right]^B,$$

$$B^{-1}\{f^B(\xi)g^B(\xi)\} = \int_0^\infty f^B(\xi)g^B(\xi)\xi J_0(\xi r) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\rho)g(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \alpha}) \rho d\rho d\alpha.$$

В результате будем иметь

$$\sigma_{zz}^L(s, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G(\rho)T^L(s, \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta}) \rho d\rho d\theta. \quad (9)$$

Наконец, если удастся выполнить обращение подынтегральной функции $T^L(s, x)$ относительно преобразования Лапласа (предполагая допустимой перемену порядка интегрирования), получим

$$\sigma_{zz}(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G(\rho)T(t, \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta}) \rho d\rho d\theta. \quad (10)$$

Инверсию преобразования Бесселя для функции $T^{LF}(s, \xi)$ можно выполнить, используя табличное соотношение [6]

$$B^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}}{\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}\right) = \frac{e^{-\frac{s}{\alpha}\sqrt{r^2+z^2}}}{\alpha\sqrt{r^2+z^2}} \quad (11)$$

и свойство преобразования Бесселя [4]

$$B\left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr}\right) = -\xi^2 f^B(\xi),$$

из которого следует

$$B^{-1}(\xi^2 f^B(\xi)) = -\left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr}\right). \quad (12)$$

Последовательное применение формул (11), (12) позволяет получить инверсию преобразования Бесселя функции $T^{LF}(s, \xi)$ в виде

$$T^L(s, r) = \left(B_0^{(\alpha)} + B_1^{(\alpha)} \frac{1}{s} + B_2^{(\alpha)} \frac{1}{s^2} + B_3^{(\alpha)} \frac{1}{s^3} + B_4^{(\alpha)} \frac{1}{s^4}\right) e^{-\frac{s}{\alpha}\sqrt{r^2+z^2}} -$$

$$- 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \left(B_0^{(\beta)} + B_1^{(\beta)} \frac{1}{s} + B_2^{(\beta)} \frac{1}{s^2} + B_3^{(\beta)} \frac{1}{s^3} + B_4^{(\beta)} \frac{1}{s^4}\right) e^{-\frac{s}{\beta}\sqrt{r^2+z^2}},$$

где $B_n^{(\alpha)}$, $B_n^{(\beta)}$, $n = 0 \div 4$ — дробно-рациональные функции r и z , которые здесь не приведены вследствие их громоздкости.

Наконец, обращение $T^L(s, r)$ относительно преобразования Лапласа реализуется с помощью табличных формул вида

$$L^{-1} \left(e^{-s \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha}} \right) = \delta \left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha} \right);$$

$$L^{-1} \left(\frac{1}{s^n} e^{-s \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha}} \right) = \frac{\left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha} \right)^{n-1}}{(n-1)!} H \left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha} \right).$$

В результате окончательно получаем

$$T(t, r) = \left[B_0^{(\alpha)} \delta(t_\alpha) + \left(B_1^{(\alpha)} + B_2^{(\alpha)} t_\alpha + B_3^{(\alpha)} \frac{t_\alpha^2}{2} + B_4^{(\alpha)} \frac{t_\alpha^3}{6} \right) H(t_\alpha) \right] -$$

$$- 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \left[B_0^{(\beta)} \delta(t_\beta) + \left(B_1^{(\beta)} + B_2^{(\beta)} t_\beta + B_3^{(\beta)} \frac{t_\beta^2}{2} + B_4^{(\beta)} \frac{t_\beta^3}{6} \right) H(t_\beta) \right], \quad (13)$$

$$t_\alpha = t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha}; \quad t_\beta = t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\beta}.$$

Таким образом, функция $T(t, r)$ задана соотношением (13), и напряжение $\sigma_{zz}(t, r)$ в произвольной точке полупространства полностью определяется формулой (10). Аналогично строятся выражения для других компонентов напряженно-деформированного состояния.

Работа выполнена в рамках украинско-российского проекта совместных исследований “Моделирование нестационарных процессов в контактирующих пружинных тилах”.

1. Кубенко В. Д. Волновые процессы в упругой полуплоскости при ударе затупленным твердым телом // Механика тв. тела. – 2011. – № 2. – С. 118–129.
2. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Ленинград: Судостроение, 1980. – 344 с.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука; ГИФМЛ, 1966. – 295 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. В 2-х т. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. – Москва: Наука; ГИФМЛ, 1970. – 330 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 23.04.2012

Академік НАН України **В. Д. Кубенко**

Осесиметрична задача нестационарного вдавлювання твердого тіла в пружний півпростір (стала область контакту)

Розв'язується осесиметрична задача для пружного півпростору, по поверхні якого в певний момент часу відбувається удар твердим тілом із затупленою лобовою поверхнею. Конкретно розглянуто випадок нестационарного вдавлювання торцем кругового циліндра. Прийнято спрощене формулювання граничних умов на поверхні півпростору. Отримано аналітичні вирази для характеристик напруженого стану в довільній точці пружного масиву.

Academician of the NAS of Ukraine **V. D. Kubenko**

The axially symmetric problem of nonstationary rigid body denting into an elastic half-space (stationary contact domain)

The axially symmetric problem for an elastic half-space under the impact by a rigid body with a blunted face is considered. The impact by the end face of a rigid circular cylinder with the set velocity of penetrating is considered particularly. The simplified statement of boundary conditions for the half-space surface is accepted. Analytical expressions for the stressed state at an arbitrary point of the elastic array are obtained.