УДК 517.9

А. Л. Гуляницький, В. В. Семенов

Інтегро-диференціальні системи псевдопараболічного типу: апріорні оцінки та імпульсно-точкова керованість

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Для вольтеррівського інтегро-диференціального оператора псевдопараболічного типу одержано апріорні оцінки у негативних нормах, теореми існування та єдиності узагальнених розв'язків відповідних крайових задач. Розглянуто питання імпульсно-точкової керованості систем, що описуються інтегро-диференціальними псевдопараболічними рівняннями.

Інтегро-диференціальні рівняння Вольтерра виникають при дослідженні систем з пам'яттю, зокрема в теорії в'язко-пружних матеріалів і в задачах в'язкодинаміки [1]. Так, врахування властивості пам'яті деяких полімерів та бетонних сумішей приводить до параболічного інтегро-диференціального рівняння дифузії і гіперболічного рівняння динаміки [2]. В [3] розглянуто рівняння

$$(\gamma - \Delta)u_t - \Delta u - \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds = f(x,t),$$

що виникає в задачах нелінійної динаміки спадково пружних тіл. У випадку сталих коефіцієнтів розв'язок одержано в явному вигляді.

Псевдопараболічні (Соболєва–Гальперна) та близькі до них диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами досліджено в [4, 5].

Зокрема, для деяких рівнянь доведено, що якщо права частина є розподілом певного скінченного порядку, то рівняння має єдиний розв'язок, що при цьому належить класу L_2 або деякому позитивному простору. В [5] відсутні обмеження на коефіцієнти операторів, що діють на молодші похідні, але при цьому накладено досить жорсткі обмеження на оператор зі старшою похідною. В [6] доведено теореми існування та єдиності для псевдопараболічних рівнянь з некласичними умовами спряження. Задачі керованості псевдопараболічних систем у класах узагальнених впливів досліджено в [7–10].

В [11] доведено апріорні нерівності для параболічного лінійного інтегро-диференціального оператора, аналогічні оцінкам для диференціального оператора цього типу, одержаним у [4]. Це дало змогу перенести теореми узагальненої розв'язності й керованості на випадок інтегро-диференціального рівняння.

У даній роботі для вольтеррівського інтегро-диференціального оператора псевдопараболічного типу одержано апріорні оцінки у негативних нормах. З цих оцінок випливають теореми існування та єдиності розв'язку відповідного рівняння при правих частинах з деяких класів розподілів скінченного порядку. Також розглянуто питання імпульсно-точкової керованості систем, що описуються даними рівняннями.

Основні позначення і простори. Розглянемо рівняння, що узагальнює досліджене у [3]:

$$\mathfrak{L}u = \mathfrak{A}u_t + \mathfrak{B}u - \mathfrak{I}u = f.$$

Тут $u = u(x,t)$ — шукана функція стану, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, де Ω — обмежена область з достатньо гладкою межею $\partial\Omega$, $t \in [0,T]$, $f = f(x,t)$; $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ — диференціальні оператори другого порядку, що діють за просторовими змінними, наприклад

$$\mathfrak{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$

оператор $\mathfrak{B}$ задається аналогічним виразом,

$$\mathfrak{I}u = \int_0^t \left(\sum_{i,j=1}^{n}(k_{ij}(x,t,\tau)u_{x_i}(x,\tau))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t,\tau)u_{x_i}(x,\tau) + k(x,t,\tau)u(x,\tau)\right)d\tau.$$

Вимагаємо виконання умов:

функції $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, a_i, b_i — неперервно диференційовні, а a і b — неперервні в замкненій області $\overline{\Omega}$;

ядра k_{ij}, k_i, k обмежені, а k_{ij} й k_i — диференційовні за просторовими змінними;

оператори $\mathfrak{A}$ й $\mathfrak{B}$ рівномірно еліптичні, тобто $\exists\, \alpha > 0$, $\beta > 0$: $\forall\, x \in \Omega$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \beta\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2;$$

$$\forall\, x \in \Omega \qquad a(x) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n}|b_i(x)|\right), \qquad b(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}(x), \qquad b(x) \geqslant 0.$$

Нехай C_s^∞, $s \in \{0,T\}$ — лінійні множини нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють умови

$$u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad u|_{t=s} = 0. \tag{1}$$

Під L_2, якщо не вказано інше, матимемо на увазі $L_2(Q)$.

Позначимо W^+ (W_*^+) і H^+ (H_*^+) поповнення C_0^∞ (C_T^∞) за нормами

$$\|u\|_{W^+} = \left(\sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^2 dQ\right)^{1/2}, \qquad \|u\|_{H^+} = \left(\int_Q \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dQ\right)^{1/2}.$$

Простори W^+, W_*^+, H^+ і H_*^+ щільно вкладаються в L_2, що випливає з умов (1) і нерівності Фрідріхса. Позначимо W^-, W_*^-, H^-, H_*^- негативні простори, побудовані за L_2 і відповідними позитивними просторами. Мають місце ланцюжки щільних та компактних вкладень

$$W^+ \subset H^+ \subset L_2 \subset H^- \subset W^-, \qquad W_*^+ \subset H_*^+ \subset L_2 \subset H_*^- \subset W_*^-.$$

Формально спряженим до $\mathfrak{L}$ є оператор

$$\mathfrak{L}^*v=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)v_{tx_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)v_t)_{x_i}-a(x)v_t-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x)v_{x_j})_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(b_i(x)v)_{x_i}+b(x)v-$$

$$-\int_t^T\left(\sum_{i,j=1}^{n}(k_{ij}(x,\tau,t)v_{x_i}(x,\tau))_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}(k_i(x,\tau,t)v(x,\tau))_{x_i}+k(x,\tau,t)v(x,\tau)\right)d\tau.$$

Областями визначення операторів $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^*$ є, відповідно, C_0^∞ та C_T^∞.

Апріорні оцінки в негативних нормах. Шляхом безпосередньої перевірки можна довести оцінки.

Лема 1. $\exists\, C>0\colon \forall\, u\in C_0^\infty$ *має місце* $\|\mathfrak{L}u\|_{W_*^-}\leqslant C\|u\|_{H^+}$, $\|\mathfrak{L}u\|_{H_*^-}\leqslant C\|u\|_{W^+}$.

Лема 2. $\exists\, C>0\colon \forall\, v\in C_T^\infty$ *має місце* $\|\mathfrak{L}^*v\|_{W^-}\leqslant C\|v\|_{H_*^+}$, $\|\mathfrak{L}^*v\|_{H^-}\leqslant C\|v\|_{W_*^+}$.

Лема 1 дає змогу розширити за неперервністю оператор $\mathfrak{L}$ і розглядати його як неперервне відображення $W^+\to H_*^-$ і $H^+\to W_*^-$. Зауважимо, що на елементах простору W^+ ці два розширення збігаються. Аналогічні твердження щодо спряженого оператора справедливі на підставі леми 2. Збережемо за розширеними операторами позначення $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{L}^*$.

Лема 3. *Нехай* $f,\ g\in C([0,T])$ — *невід'ємні функції. Тоді* $\forall\, p>0$

$$\int_0^T f(t)\left(\int_0^t e^{p\tau}g(\tau)\,d\tau\right)dt\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\left(\int_0^T e^{pt}f^2(t)\,dt+\int_0^T e^{pt}g^2(t)\,dt\right).$$

При $f=g$ твердження леми доведено в [11]; в загальному випадку міркування аналогічні.

Лема 4. $\exists\, C>0\colon \forall\, u\in H^+$ *має місце оцінка* $\|\mathfrak{L}u\|_{W_*^-}\geqslant C\|u\|_{H^+}$.

Доведення. Доведемо лему для функцій з C_0^∞. Розглянемо інтегральне перетворення, що кожному елементу $u\in C_0^\infty$ ставить у відповідність функцію

$$v(x,t)=-\int_T^t e^{-p\tau}u(x,\tau)\,d\tau,$$

де p — деяка додатна стала, значення якої буде підібрано пізніше. Таким чином, $u(x,t)=-e^{pt}v_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)=-e^{pt}v_{tx_i}(x,t)$. Легко бачити, що $v\in C_T^\infty$.

Щоб довести потрібне твердження, обгрунтуємо ланцюжок нерівностей

$$\|\mathfrak{L}u\|_{W_*^-}\|v\|_{W_*^+}\geqslant|(\mathfrak{L}u,v)_{L_2}|\geqslant C_0\|v\|_{W_*^+}^2\geqslant C\|v\|_{W_*^+}\|u\|_{H^+}.$$

Ліва нерівність — це нерівність Коші–Шварца. Права є очевидною (див. вираз для u через v_t). Щоб довести середню, розглянемо білінійну форму

$$(\mathfrak{L}u,v)_{L_2}=(\mathfrak{A}u_t,v)_{L_2}+(\mathfrak{B}u,v)_{L_2}+(\mathfrak{I}u,v)_{L_2}.$$

Спершу оцінимо $(\mathfrak{A}u_t,v)_{L_2}+(\mathfrak{B}u,v)_{L_2}=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6$.

Інтегруючи частинами з урахуванням рівномірної еліптичності оператора $\mathfrak{A}$, а також умов (1) та їх наслідків ($u_{x_i}|_{t=0}=v_{x_i}|_{t=T}=0$), маємо

$$I_1=-\int_Q v\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{tx_i})_{x_j}dQ=\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}u_{tx_i}v_{x_j}dQ=-\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij}u_{x_i}v_{tx_j}dQ=$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q e^{pt} a_{ij} v_{tx_i} v_{tx_j} dQ \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_Q \alpha e^{pt} v_{tx_i}^2 dQ.$$

Аналогічно можна показати, що

$$I_2 = \int_Q \sum_{i=1}^{n} a_i u_{tx_i} v dQ = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\partial a_i}{\partial x_i} e^{pt} v_t^2 dQ, \qquad I_3 = \int_Q a u_t v dQ = \int_Q a e^{pt} v_t^2 dQ,$$

$$I_4 = -\int_Q v \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} u_{x_j})_{x_i} dQ \geqslant \int_Q \frac{\beta p}{2} e^{pt} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 dQ,$$

$$I_5 = \int_Q \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v dQ = -\sum_{i=1}^{n} \int_Q b_i u v_{x_i} dQ - \sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u v dQ.$$

Оскільки

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_Q b_i u v_{x_i} dQ = \sum_{i=1}^{n} \int_Q b_i e^{pt} v_t v_{x_i} dQ \geqslant -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q |b_i| e^{pt} (v_t^2 + v_{x_i}^2)\, dQ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u v dQ + I_6 = \sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u v dQ + \int_Q b u v dQ \geqslant 0,$$

маємо

$$I_2 + I_3 + I_5 + I_6 \geqslant -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{pt} |b_i| v_{x_i}^2 dQ,$$

тож загалом

$$(\mathfrak{A} u_t, v)_{L_2} + (\mathfrak{B} u, v)_{L_2} \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{pt} v_{tx_i}^2 dQ + P_1(p) \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{pt} v_{x_i}^2 dQ,$$

де $P_1(p) \sim p$. Тепер оцінимо доданки $(\mathfrak{I} u, v)_{L_2} = (u, \mathfrak{I}^* v)_{L_2} = J_1 + J_2 + J_3$.

Позначимо $M = \max\limits_{(x,t,\tau)} (|k_{ij}(x,t,\tau)|, |k_i(x,t,\tau)|, |k(x,t,\tau)|)$. Використавши формулу інтегрування частинами і лему 3, маємо

$$J_1 = \int_Q e^{pt} v_t(x,t) \int_t^T \sum_{i,j=1}^{n} (k_{ij}(x,\tau,t) v(x,\tau)_{x_i})_{x_j} d\tau dQ =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T -e^{pt} v_{tx_j}(x,t) \int_t^T k_{ij}(x,\tau,t) v_{x_i}(x,\tau)\, d\tau dt d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T -v_{x_i}(x,\tau) \int_0^\tau e^{pt} k_{ij}(x,\tau,t) v_{tx_j}(x,t)\, dt d\tau d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{0}^{T} |v_{x_i}(x,\tau)| \int_{0}^{\tau} e^{pt} |v_{tx_j}(x,t)|\, dt d\tau d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_{Q} e^{pt}(v_{tx_j}^2 + v_{x_i}^2)\, dQ \right) = \frac{Mn}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{Q} e^{pt}(v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2)\, dQ \right).$$

Аналогічно

$$J_2 = \int_{Q} -e^{pt} v_t(x,t) \int_{t}^{T} \sum_{i=1}^{n} (k_i(x,\tau,t)v(x,\tau))_{x_i} d\tau dQ =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{T} v(x,\tau) \int_{0}^{\tau} e^{pt} k_i(x,\tau,t) v_{tx_i}(x,t)\, dt d\tau d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{\Omega} \int_{0}^{T} \sum_{i=1}^{n} |v(x,\tau)| \int_{0}^{\tau} e^{pt} |v_{tx_i}(x,t)|\, dt d\tau d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{Q} e^{pt}(v^2 + v_{tx_i}^2)\, dQ \right) \leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{Q} e^{pt}(v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2)\, dQ \right)$$

(в останньому переході використано нерівність Фрідріхса).

$$J_3 = \int_{Q} e^{pt} v_t(x,t) \int_{t}^{T} k(x,\tau,t) v(x,\tau)\, d\tau dQ \leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \left(\int_{Q} e^{pt}(v^2 + v_t^2)\, dQ \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{Q} e^{pt}(v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2)\, dQ \right).$$

Таким чином,

$$|(\mathfrak{L}u, v)|_{L_2} \geqslant |(\mathfrak{A}u, v)_{L_2} + (\mathfrak{B}u, v)_{L_2}| - |(\mathfrak{I}u, v)_{L_2}| \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_{Q} e^{pt} v_{tx_i}^2 dQ + P_1(p) \sum_{i=1}^{n} \int_{Q} e^{pt} v_{x_i}^2 dQ + P_2(p) \left(\int_{Q} e^{pt}(v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2)\, dQ \right),$$

де $P_1(p) \sim p$, $P_2(p) \sim p^{-1/2}$, тож при достатньо великому p потрібна нерівність має місце, наприклад, з $C_0 = \alpha/2$.

Аналогічно доводиться

Лема 5. $\exists\, C > 0\colon \forall\, v \in H_*^+$ *має місце оцінка* $\|\mathfrak{L}^* v\|_{W^-} \geqslant C\|v\|_{H^+}$.

З доведених нерівностей випливають [4] теореми розв'язності.

Теорема 1. *Для кожного функціонала* $f \in W_*^-$ *рівняння* $\mathfrak{L}u = f$ *має єдиний розв'язок з простору* H^+, *причому* $u \in W^+ \Leftrightarrow f \in H_*^-$.

Теорема 2. *Для кожного функціонала $g \in W^-$ рівняння $\mathfrak{L}^* v = g$ має єдиний розв'язок з простору H_*^+, причому $v \in W_*^+ \Leftrightarrow g \in H^-$.*

Зауваження 1. До вищерозглянутої задачі зводиться початково-крайова задача з неоднорідними початковими умовами:

$$\mathfrak{L}u = f, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Введемо до розгляду функцію $u^*(x,t) = u_0(x)$. Якщо $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, то можна зробити заміну $v = u - u^*$, що приводить до задачі

$$\mathfrak{L}v = f - \mathfrak{L}u^*, \qquad v|_{t=0} = 0, \qquad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Імпульсно-точкова керованість. Розглянемо систему

$$\mathfrak{L}u(h) = B(h), \qquad h \in U, \tag{2}$$

де $B\colon U \to W_*^-$.

Означення 1. Система (2) точно керована (асимптотично керована) в банаховому просторі $M \subseteq L_2$ множиною допустимих керувань U, якщо множина $\{u(h)\colon h \in U\}$ покриває M (щільна в M).

З попередніх результатів безпосередньо випливає: якщо $B(U) = W_*^-$, то (2) точно керована в H^+. Умова $B(U) = W_*^-$ є жорсткою та, як правило, не виконується для правих частин, що зустрічаються в задачах узагальненого керування. Послабивши вимоги на праву частину, яка задає вплив, приходимо до твердження: якщо $B(U)$ щільна в W_*^-, то система (2) асимптотично керована в H^+ [4].

Розглянемо дві конкретні ситуації керованості. Нехай

$$B(h) = \sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j \delta(\cdot - t_j) \otimes g_j,$$

де $h = \{(t_j, c_j, g_j(x))\}$ — фінітна послідовність елементів $[0,T] \times \mathbb{R} \times L_2(\Omega)$ (тобто, починаючи з деякого j_0, всі елементи дорівнюють нулю). Позначимо через F множину всіх таких фінітних послідовностей. Відомо [10], що множина

$$\left\{\sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j \delta(\cdot - t_j) \otimes g_j \colon h \in F\right\}$$

щільно вкладена в W_*^-. Звідси випливає асимптотична імпульсна керованість системи (2).

Припустимо, що множина Ω циліндрична за змінною x_1, тобто $\Omega = (0,1) \times \Omega'$, $\Omega' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Нехай

$$B(h) = \sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j \delta(\cdot - t_j) \otimes \delta(\cdot - x_{1,j}) \otimes g_j,$$

де $h = \{(t_j, x_{1,j}, c_j, g_j(x_2, \ldots, x_n))\}$ — фінітна послідовність елементів декартового добутку $[0,T] \times [0,1] \times \mathbb{R} \times L_2(\Omega')$; F' — множина всіх таких фінітних послідовностей. Оскільки множина

$$\left\{\sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j \delta(\cdot - t_j) \otimes \delta(\cdot - x_{1,j}) \otimes g_j \colon h \in F'\right\}$$

щільно вкладена в W_*^-, то система (2) асимптотично керована в просторі H^+ (імпульсно-точкова керованість).

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Shaw S., Whiteman J. R.* Towards adaptive finite element schemes for partial differential Volterra equation solvers // Adv. in Comp. Math. – 1996. – **6**. – P. 309–323.
3. *Фалалеев М. В, Орлов С. С.* Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложение в математической теории упругости // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – **4**, № 1. – С. 118–134.
4. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 465 с.
5. *Номировский Д. А.* О гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми дифференциальными операторами с частными производными // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 12. – С. 1707–1716.
6. *Семенов В. В.* Обобщенное решение псевдопараболической задачи сопряжения с условием неидеального контакта // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2005. – № 2. – (93). – С. 107–115.
7. *White L. W.* Point control of pseudoparabolic problems // J. of Different. Equations. – 1981. – **42**, No 3. – 366–374.
8. *White L. W.* Optimal bang-bang controls arising in a Sobolev impulse control problem // J. Math. Anal. Appl. – 1984. – **99**, No 1. – P. 237–247.
9. *Семенов В. В.* Про керованість псевдопараболічних систем в класах зосереджених впливів // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2001. – No 1(86). – С. 78–85.
10. *Семенов В. В.* Імпульсна керованість деяких лінійних розподілених систем типу С. Л. Соболєва // Доп. НАН України. – 2001. – № 12. – С. 77–82.
11. *Анікушин А. В.* Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами параболічного типу // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2010. – № 3(102). – С. 3–16.
12. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа – Москва: Физматлит, 2007. – 734 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 01.09.2011

А. Л. Гуляницкий, В. В. Семенов

Интегро-дифференциальные системы псевдопараболического типа: априорные оценки и импульсно-точечная управляемость

Для вольтерровского интегро-дифференциального оператора псевдопараболического типа получены априорные оценки в негативных нормах, теоремы существования и единственности обобщенных решений соответствующих граничных задач. Рассмотрен вопрос импульсно-точечной управляемости систем, описываемых интегро-дифференциальными псевдопараболическими уравнениями.

A. L. Hulianytskyi, V. V. Semenov

Integro-differential pseudoparabolic systems: *a priori* estimates and impulse-point controllability

For a pseudoparabolic Volterra integro-differential operator, the a priori estimates in negative norms and the unique generalized solvability theorems for the corresponding boundary value problems are obtained. The question of impulse-point controllability of systems governed by pseudoparabolic integro-differential equations is investigated.