УДК 517.54

И. В. Денега

Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Исследованы экстремальные задачи геометрической теории функций комплексного переменного, связанные с оценками функционалов, заданных на системах неналегающих областей. В частности, основное внимание уделено известной проблеме В. Н. Дубинина и обобщению некоторых результатов в данной проблеме.

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного [1–15]. Многие задачи такого плана сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. Следует отметить, что большое значение при решении таких задач имеет теория квадратичных дифференциалов, в частности результаты, описывающие локальную и глобальную структуру их траекторий (см., например, [3]). Подробнее с историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1–15].

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [5, 9, 10]) и $\chi(t) = (t+t^{-1})/2$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Систему точек $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}\colon k = \overline{1,n}\}$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi$. Обозначим при этом $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+\bigcup\{0\}$ полагаем

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Целью данной работы является получение точных оценок сверху для функционала следующего вида

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k), \tag{1}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-лучевая система точек, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система неналегающих областей (т. е. $B_p\bigcap B_j = \varnothing$ при $p \neq j$) таких, что $a_k \in B_k$ при $k = \overline{0,n}$.

В работах [5, с. 68, 9.2], [10, с. 381, № 16] была сформулирована следующая экстремальная задача.

Задача. Доказать, что максимум функционала (1), где B_0, B_1, B_2, $\ldots$, B_n, $n \geqslant 2$ — попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутренний радиус области B_j в точке a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0,n}$ и $\gamma \leqslant n$, достигается для некоторой конфигурации областей, которые имеют n-кратную симметрию.

Эта проблема вызвала большой интерес и изучалась в различных направлениях (см., например, [4, 8, 9, 11, 14, 15]).

2. Основные результаты. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma_2 = 1{,}2$, $\gamma_3 = 2{,}3$, $\gamma_4 = 3{,}7$, а $\gamma_n = n$ при $n \geqslant 5$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ такой, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0,n}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2. \tag{2}$$

В частном случае, когда точки a_k лежат на единичной окружности, мы получаем известный результат Л. В. Ковалева [8].

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = \begin{cases} \sqrt[8]{n}, & n = \overline{2,6}, \\ \sqrt[3]{n} + 1/3, & n \geqslant 7. \end{cases}$ Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$ ($k = \overline{1,n}$) справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

где D_k, d_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, — круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2).

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $\gamma \in (0,1]$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}}n^n}{(n^2-\gamma)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} R^{n+\gamma}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}dw^2,$$

где $R^{n+\gamma} = \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)$.

Доказательство теоремы 1. Метод доказательства этой теоремы основан на применении разделяющего преобразования (см. [4–6, 9, 10]) и почти дословно следует работе [8] с учетом конкретики данной теоремы.

Доказательство теоремы 2. Справедливость данной теоремы при $\gamma \in (0,1]$ следует из работ [4, теорема 4; 8] Рассмотрим сначала случай $\gamma = \sqrt[8]{n}$. При доказательстве данной теоремы основную роль играет метод, предложенный в работе [9, с. 255]. Согласно ему имеет место цепочка неравенств

$$J_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n}[r(B_0,0)r(B_k,a_k)]^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|^2\right]^{\frac{\gamma}{n}}\left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mathcal{L}^{(0)}(A_n)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} = [2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

где $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, причем $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma} \geqslant 2/n$. С другой стороны, из результатов работы [9, с. 257] и свойств разделяющего преобразования получаем

$$J_n^0(\gamma) = r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

где D_k, d_k, $k=\overline{0,n}$, $d_0 = 0$, — соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2). Оценим величину

$$Q_n(\gamma) = \frac{r^{\gamma}(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{r^{\gamma}(D_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k,d_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[2\cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1}\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}\left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \times$$

$$\times\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда

$$Q_n\left(\sqrt[8]{n}\right)\leqslant\left[\frac{n}{4}\right]^{\sqrt[8]{n}+1}\left[1-\frac{1}{\sqrt[16]{n}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{\frac{7}{8}}}}\left(n^{\frac{7}{8}}\right)^{\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}}}\left(1-\frac{1}{n^{\frac{15}{8}}}\right)^{n+\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}}}\left(\frac{1+\dfrac{1}{n^{\frac{15}{16}}}}{1-\dfrac{1}{n^{\frac{15}{16}}}}\right)^{2n^{\frac{1}{16}}}\times$$

$$\times\,(\frac{4}{n^{\frac{1}{16}}}\bigg)^{1-\frac{1}{n^{\frac{7}{8}}}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{\frac{7}{8}}}}.$$

Несложные оценки показывают, что $Q_n(\sqrt[8]{n})<1$, $n=\overline{2,6}$, аналогично $Q_n(\sqrt[3]{n}+1/3)<$ <1, $n\geqslant 7$, при $\alpha_0\sqrt{\gamma}>2$. Отсюда следует, что для данных конфигураций максимум не достигается. Если $\alpha_0\sqrt{\gamma}\leqslant 2$, то на основании теоремы 1 получаем окончательный результат.

Стандартными методами несложно показать, что функция $Q_n(\gamma)$ на промежутке $\gamma\in$ $\in(1;\sqrt[8]{n}]$ $(\gamma\in(1;\sqrt[3]{n}+1/3])$ является монотонно возрастающей функцией по γ. Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность А. К. Бахтину за постановку задач, полезные советы и замечания.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
6. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 1997. – **237**. – С. 56–73.
7. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37–43.
8. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. – 1996. – **2**. – С. 96–98.
9. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2008. – 308 с.
10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: “Дальнаука” ДВО РАН, 2009. – 390 с.
11. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Подвысоцкий Р. В.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2009. – № 9. – С. 13–17.
12. *Дубинин В. Н., Кириллова Д. А.* Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций // Дальневост. мат. журн. – 2010. – **10**, № 2. – С. 130–152.
13. *Бахтин А. К., Подвысоцкий Р. В.* Квадратичные дифференциалы и экстремальные задачи о неналегающих областях // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 1. – С. 439–442.
14. *Заболотний Я. В.* Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області // Доп. НАН України. – 2011. – № 4. – С. 20–23.

15. *Заболотний Я. В.* Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про непeретинні області // Там само. – 2011. – № 9. – С. 11–14.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 20.06.2011*

І. В. Денега

Квадратичні диференціали і відокремлюючі перетворення в екстремальних задачах про неналяжні області

Досліджено екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язані з оцінками функціоналів, заданих на системах неперетинних областей. Зокрема, основну увагу приділено відомій проблемі В. М. Дубиніна та узагальненню деяких результатів цієї проблеми.

I. V. Denega

Quadratic differentials and a separating transformation in extremal problems on non-overlapping domains

The paper is devoted to extremal problems of geometric function theory associated with estimates of functionals defined on systems of non-overlapping domains and, in particular, to the well-known problem of V. N. Dubinin and a generalization of some results in this problem.