



УДК 539.3:519.6

© 2012

Э. Л. Гарт, член-корреспондент НАН Украины В. С. Гудрамович

Численный анализ процесса упруго-пластического деформирования структурированных сред

Рассмотрено деформирование упруго-пластических сред с локальными дефектами: поры, трещины, включения, которые являются концентраторами напряжений. При моделировании напряженно-деформированного состояния использованы проекционно-итерационные схемы вариационно-сеточного метода конечных элементов. Эти схемы позволяют существенно уменьшить время компьютерного расчета. Разработаны алгоритмы определения полей деформаций и напряжений с построением областей остаточных деформаций, что дает возможность исследовать взаимовлияние дефектов и изучить динамику процесса деформирования, который ведет к разрушению.

Процессы разрушения сплошных сред характеризуются возникновением различных дефектов — нарушений сплошности материала (поры, трещины) и включений, которые являются локальными концентраторами напряжений, и их трансформацией (изменение количества, формы, площади пористости). При возрастании нагрузки поры сливаются, образуя пустоты. Включения определяют локальное изменение механических свойств сплошного материала, что также может привести к нарушениям сплошности.

Указанные явления имеют важные приложения в механике различных металлических и полимерных материалов, горных пород, неоднородных пластинчато-оболочечных структур и др. [1–3]. Образование пор и повреждений может быть результатом ударного взаимодействия гетерогенных потоков с преградами и определяет процесс эрозийного повреждения (либо адгезионного осаждения) [4].

На рис. 1, а показана типичная картина образования пор в образце при растяжении [5], на рис. 1, б — слияние микропор в упруго-пластическом материале в экспериментах по соударению пластин [6]. При моделировании процесса деформирования целесообразна замена нарушений сплошности произвольных форм каноническими (эллиптическими, круговыми) [7] (рис. 1, в).

Изучение особенностей указанных явлений требует использования сложных моделей нелинейного деформирования. Одна из основных физически нелинейных моделей связана с упруго-пластическим деформированием материала (образование остаточных деформаций при высоких уровнях нагрузок) [8]. К ним относятся и другие усложненные упруго-вязко-пластические модели [2].

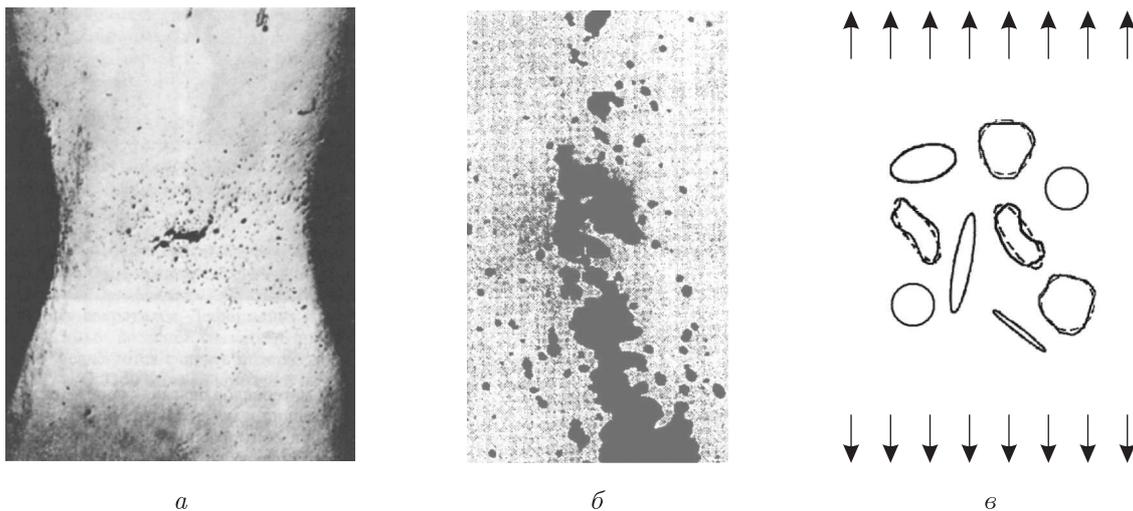


Рис. 1

Исследование упруго-пластического состояния часто проводится с применением методов упругих решений, в которых строятся схемы последовательных приближений [8]. В каждом приближении рассматривается задача теории упругости, расчет проводится до заданного совпадения двух соседних приближений. Распространенными модельными задачами, отражающими наиболее характерные особенности деформирования и разрушения, являются плоские задачи теории упругости и пластичности.

Ограниченное количество задач, к которым могут быть применены известные аналитические методы, приводит к целесообразности использования численных методов. К наиболее распространенным и эффективным относится вариационно-сеточный метод конечных элементов (МКЭ) и его многосеточные модификации [9]. Использование проекционно-итерационных схем его реализации [10–12] позволяет существенно сократить время компьютерного расчета параметров напряженно-деформированного состояния структурированных сред. Применение таких схем к исследованиям упруго-пластического деформирования пластин с отверстиями различной формы дает экономию времени расчета в десятки раз (в зависимости от класса рассмотренных задач от 30 до 120 раз [13, 14]) по сравнению с расчетными схемами на основе традиционного МКЭ. Успешная практика использования указанных схем позволяет рекомендовать их к широкому применению для исследования поведения плоскодеформируемых структурированных сред с локальными концентраторами. Это является важным, когда приходится решать задачи равновесия сред с большим количеством дефектов. Моделирование поведения таких сред связано с построением процесса решения однотипных задач, учет пластических свойств основан на идеологии методов упругих решений. Проекционно-итерационные схемы МКЭ, сокращающие время компьютерного анализа, позволяют увеличить количество приближений в этих методах.

В данной работе рассматривается вариационный подход к построению решений упруго-пластических задач для плоскодеформируемых сред с локальными концентраторами различного вида. Применены проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ. Определяются поля деформаций и напряжений таких сред. Используется модель упрочняющегося упруго-пластического тела. Возможно применение более сложных моделей, например, модели Гарсона, основанной на условиях пластичности для пористых сред [2].

Анализ построенных областей остаточных деформаций дает возможность исследовать взаимовлияние локальных концентраторов и изучить динамику процесса деформирования, ведущего к разрушению.

1. Рассмотрим плоскодеформируемую среду с локальными концентраторами (поры, трещины, включения) различной формы. Для определенности рассмотрим случай одноосного нагружения (растяжения, сжатия), отражающий основные особенности процесса деформирования.

При изучении полей деформаций и напряжений вблизи локальных концентраторов исследуются задачи, в которых область возмущения напряженного состояния меньше характерных размеров тела. При проведении численного анализа размеры тела полагаются бесконечными. Использование экстремальных принципов для таких областей следует проводить с учетом соображений, изложенных в [15].

Для учета пластических деформаций в каждом приближении методов упругих решений рассматриваются задачи теории упругости с дополнительными факторами: нагрузками (А. А. Ильюшин, 1948 г.), деформациями, переменными параметрами упругости (И. А. Биргер, 1951 г.). Указанные факторы зависят от параметров предыдущего приближения и характеризуют пластические свойства материала [8].

Для метода переменных параметров упругости и деформационной теории пластичности, достаточно справедливой при нагружении, близком к простому, в каждом приближении исследуется задача теории упругости с переменными модулями упругости \tilde{E} , сдвига \tilde{G} и коэффициентом Пуассона $\tilde{\nu}$:

$$\tilde{E} = \frac{3E}{2E\psi + 1 - 2\nu}; \quad \tilde{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu}; \quad \tilde{G} = \frac{\tilde{E}}{2(1 + \tilde{\nu})}; \quad \psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}.$$

Соотношения, связывающие деформации ε_{ij} и напряжения σ_{ij} , имеют такой же вид, как в теории упругости

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\tilde{G}} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\tilde{\nu}}{1 + \tilde{\nu}} \sigma \delta_{ij} \right), \quad (1)$$

где \tilde{G} , $\tilde{\nu}$ — переменные параметры упругости; σ — среднее напряжение; δ_{ij} — символ Кронекера.

В первом приближении решается задача теории упругости при $E_1 = E$, $\nu_1 = \nu$. Далее вычисления проводятся по схеме $\sigma_{ij1}^e \rightarrow \sigma_{i1}^e \rightarrow \sigma_{i1} \rightarrow \psi_1 = 3\varepsilon_{i1}^e / 2\sigma_{i1}$ (значок “e” обозначает решение задачи теории упругости). Во втором приближении $E_2 = \sigma_{i1} / \varepsilon_{i1}^e$ и осуществляется схема расчета $\sigma_{ij2}^e \rightarrow \sigma_{i2}^e \rightarrow \sigma_{i2} \rightarrow \psi_2$, в третьем — $E_3 = \sigma_{i2} / \varepsilon_{i2}^e$ и т. д. Процесс вычислений заканчивается при заданной близости двух соседних приближений $E_n \approx E_{(n-1)}$; точка, определяющая σ_{in}^e , должна находиться как можно ближе к диаграмме деформирования.

Для метода переменных параметров упругости разработаны также схемы расчета, основанные на теории течения. Практика применения метода свидетельствует о его высокой эффективности, точность его увеличивается с увеличением числа приближений. Применимость деформационной теории следует исследовать особо. В частности, это необходимо провести для сечений, где могут нарушаться условия простого нагружения (например, в угловых точках локальных концентраторов при их определенных формах [8]).

Для плоских задач при введении ортогональной системы координат xOy математическая модель такова. На классе непрерывно-дифференцируемых в области Ω функций найти перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$, доставляющие минимум функционалу

$$I(x, y) = \int_{\Omega} \left\{ (2\mu + \lambda) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} (p_x u + p_y v) dS, \quad (2)$$

где u , v и p_x , p_y — проекции векторов перемещений и нагрузки на оси Ox и Oy ; λ , μ — постоянные Ламе.

Функционал (2) справедлив как для задачи о плоской деформации, так и для задачи о плоском напряженном состоянии. В этих случаях постоянные Ламе соответственно равны $\lambda_1 = 2G\nu/(1 - 2\nu)$, $\mu_1 = G$, $\lambda_2 = 2G\nu/(1 + \nu)$, $\mu_2 = G$. Напряжения и деформации определяются по известным зависимостям для теории плоских задач.

Известно, что задачу нахождения минимума функционала можно рассматривать как задачу условной минимизации [10–12, 14]

$$I(z) \rightarrow \inf, \quad z \in Z, \quad (3)$$

где $I(z)$ — некоторый функционал, ограниченный снизу на множестве Z кинематически возможных перемещений; $z(u, v)$ — вектор-функция перемещений.

Для решения этой задачи используется проекционно-итерационная схема реализации МКЭ. Основная ее идея в следующем. Исходная вариационная задача (3) аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью дискретных экстремальных задач ($n = 1, 2, \dots$) для функций многих переменных

$$I_n(z_n) \rightarrow \inf, \quad z_n \in Z_n, \quad (4)$$

где Z_n — дискретный аналог множества Z .

Каждая из задач (4) решается с помощью некоторого итерационного метода, например, метода последовательной верхней релаксации. Начиная с некоторого, достаточно грубого разбиения ($n = N$), для соответствующей функции многих переменных I_n строится только несколько (k_n) приближений к ее точке минимума. Последнее полученное приближение $z_n^{(k_n)}$ интерполируется на более мелкую конечно-элементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума для соответствующей функции многих переменных I_{n+1} . Процесс продолжается до достижения заданной точности вычислений.

Целесообразно использование методики, для которой не требуется хранения матрицы жесткости системы в явном виде, а значения перемещений u и v в текущем узле выражаются через узловые значения перемещений прилегающих к нему конечных элементов (В. И. Кузьменко, 1984 [14]). Для задач, когда имеет место локальная концентрация напряжений, целесообразно использовать адаптивные сетки (алгоритмы их построения известны [9]). Важным является вопрос о выборе формы конечных элементов в рассматриваемых задачах. Наиболее часто используются треугольные (линейная аппроксимация) и прямоугольные (билинейная аппроксимация) конечные элементы. Использование треугольных элементов более предпочтительно в задачах, где имеет место локальная концентрация напряжений.

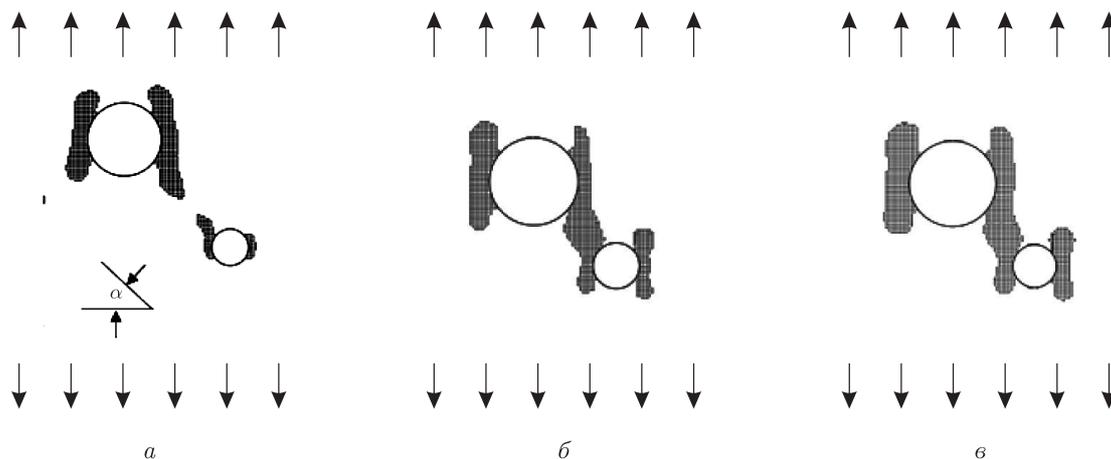


Рис. 2

Однако применение прямоугольных элементов в проекционно-итерационном процессе является более экономичным с точки зрения уменьшения времени компьютерной реализации. В процессе расчета выбираются наиболее выгодные (по времени счета и по точности) сочетания этих аппроксимаций [14].

2. Разработанные на основе проекционно-итерационных вариантов МКЭ схемы численного анализа полей деформаций и напряжений в плоскодеформируемых средах с локальными концентраторами (поры, трещины, включения) позволяют построить поля остаточных деформаций и распределения напряжений, что дает возможность, в частности, исследовать взаимовлияние концентраторов и исследовать их трансформацию в процессе нагружения.

Приведем некоторые результаты численного анализа. Рассмотрена пористая среда, поведение которой определяется диаграммой деформирования, аналогичной диаграмме для алюминиевого сплава Д16.

На рис. 2–4 показаны полученные в результате расчета поля остаточных деформаций для среды с двумя отверстиями круговой и эллиптической формы при плоской деформации. Величины нагрузок и относительные расстояния между центрами отверстий следующие: рис. 2 — $q = 125$ МПа, $r_1/r_2 = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $l/r_1 = 4,24$ (рис. 2, а), $l/r_1 = 2,83$ (рис. 2, б, в); рис. 3 — $q = 140$ МПа, $a_1/a_2 = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $l/a_1 = 4,24$ (рис. 3, а), $l/a_1 = 2,83$ (рис. 3, б); рис. 4 — $q = 155$ МПа, $a_1/a_2 = 1$, $\alpha = \beta = 45^\circ$, $l/a_1 = 4,24$ (рис. 4, а), $l/a_1 = 2,83$ (рис. 4, б) (r_1 , r_2 , a_1 , a_2 — соответственно радиусы, большие полуоси верхнего и нижнего кругового и эллиптического отверстий; l — расстояние между центрами; α , β — углы, определяющие расположение отверстий).

На рис. 2, в представлены результаты расчета для случая плоского напряженного состояния, который дает бóльшие значения ε_i , чем в случае плоской деформации. Поля остаточных деформаций возникают вначале локально у краев отверстий, затем они сливаются, образуя общую зону. В этом сечении жесткость уменьшается и здесь возможно возникновение очага разрушения.

На рис. 2–4 приведены результаты для некоторых вариантов расположения пор — отверстий. Разработанные методы и алгоритмы расчета позволяют определить поля пластических деформаций и напряжений для ансамбля локальных концентраторов различной конфигурации и вариантов их расположения.

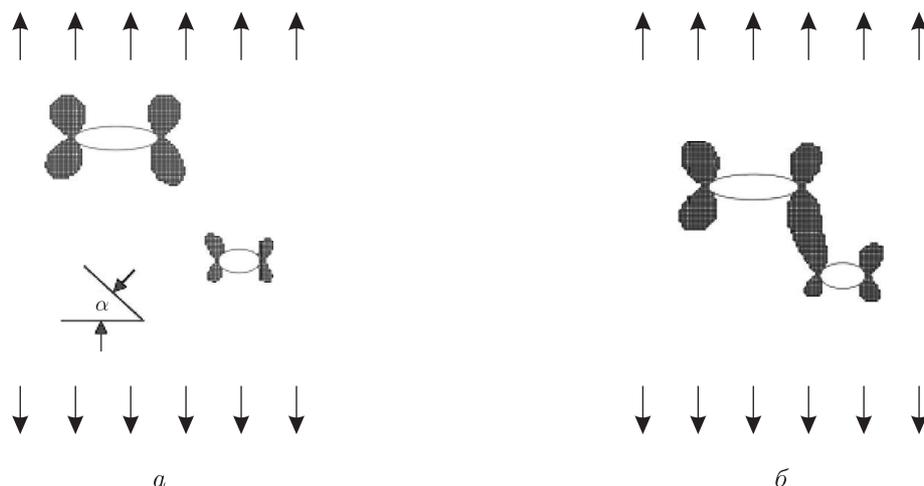


Рис. 3

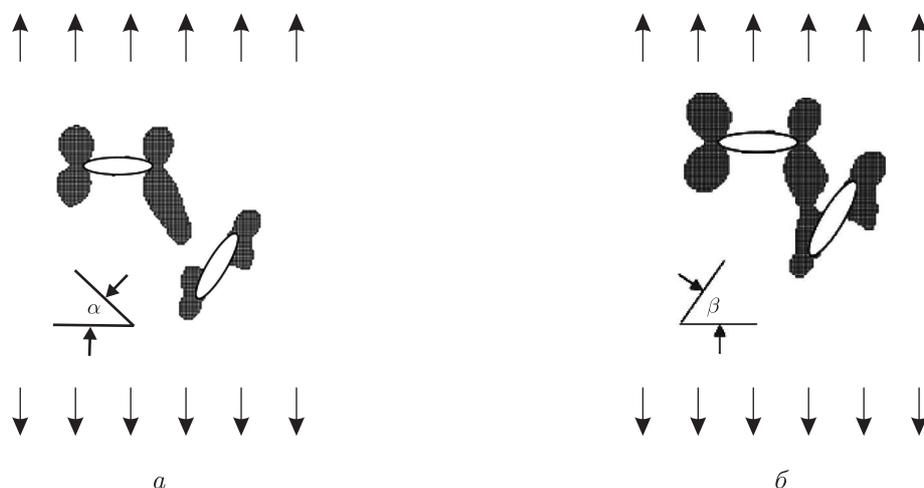


Рис. 4

Построены также схемы решения на основе метода дополнительных нагрузок А. А. Ильюшина. Возможна постановка задачи оптимизации: выбор параметров, определяющих размеры и расположение локальных концентраторов (для рис. 2–4 — это размеры отверстий, расстояние между ними и углы α и β), обеспечивающих необходимую стратегию процесса трансформации полей остаточных деформаций и напряжений.

Таким образом, предложены эффективные схемы численного моделирования поведения плоскодеформируемых сред, содержащих ансамбли дефектов в виде локальных концентраторов: отверстий (поры, трещины) и включений различной формы, на основе проекционно-итерационных схем реализации МКЭ. При этом исследуется динамика процесса образования и трансформации полей остаточных деформаций и взаимовлияние дефектов. Такой анализ позволяет, в частности, прогнозировать зоны возникновения возможных очагов разрушения среды.

1. Гольдштейн Р. В., Осипенко И. М. Структуры в процессах разрушения // Изв. РАН. Механика тв. тела. – 1999. – № 5. – С. 49–71.

2. *Кужуджанов В. Н.* Связанные модели упругопластичности и повреждаемости и их интегрирование // Там же. – 2006. – № 6. – С. 103–135.
3. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, No 12. – P. 1323–1355.
4. *Михатулин Д. С., Полежаев Ю. В., Ревизников Д. П.* Теплообмен и разрушение тел в сверхзвуковом гетерогенном потоке. – Москва: Янус, 2007. – 392 с.
5. *Puttik K. E.* Ductile fracture in metals // *Phil. Mag. Ser. B.* – 1959. – **4**, No 44. – P. 964–969.
6. *Curran D. R., Seaman L., Shockey D. A.* Dynamic failure of solids // *Phys. Reports.* – 1987. – No 147. – P. 253–388.
7. *Kachanov M., Sevastianov I.* On quantitative characterization of microstructures and effective properties // *Int. J. of Solid and Structures.* – 2005. – **42**. – P. 309–336.
8. *Ильюшин А. А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. – Москва: Физматлит, 2004. – 480 с.
9. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. – Москва: Мир, 1989. – 288 с.
10. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
11. *Kluge R.* Ein Projektions-Iterations Verfahren bei Fixpunkt Problemen und Gleichungen mit monotone Operatoren // *Monatber. Dtsch. Acad. Wiss.* – 1969. – **11**, No 8–9. – S. 599–609.
12. *Hart E. L.* Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // *J. Math. Sci.* – 2010. – **167**, No 1. – P. 76–88.
13. *Гудрамович В. С., Гарт Э. Л.* Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями // Упругость и неупругость. Матер. Межд. симп., посв. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. – Москва: Изд. МГУ, 2011. – С. 144–147.
14. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Rjabokon' S. A.* Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // *J. of Eng. Math.* – DOI:10.1007/s10665-010-9409-5.
15. *Линьков А. М., Новожиллов В. В.* Экстремальные принципы для бесконечных областей // Усп. механики деформируемых сред. – Москва: Наука, 1975. – С. 350–354.

*Институт технической механики НАН Украины
и ГКА Украины, Днепрпетровск
Днепропетровский национальный университет
им. О. Гончара*

Поступило в редакцию 08.12.2001

Е. Л. Гарт, член-корреспондент НАН України **В. С. Гудрамович**

Чисельний аналіз процесу пружно-пластичного деформування структурованих середовищ

Розглянуто деформування пружно-пластичних середовищ з локальними дефектами: пори, тріщини, включення, які є концентраторами напружень. При моделюванні напружено-деформованого стану використані проекційно-ітераційні схеми варіаційно-сіткового методу скінченних елементів. Ці схеми дозволяють істотно зменшити час комп'ютерного розрахунку. Розроблено алгоритми визначення полів деформацій і напружень з побудовою області залишкових деформацій, що дає змогу дослідити взаємовплив дефектів і вивчити динаміку процесу деформування, який веде до руйнування.

E. L. Hart, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. S. Hudramovich**

Numerical analysis of the elastoplastic deformation of structural media

The deformation of the elastoplastic media with local defects such as pores, cracks, and inclusions, which are stress concentrators, are considered. For modeling the stress-strain state, the projective-iterative schemes for the variational-grid finite element method are used. These schemes can significantly reduce a computer calculation time. The algorithms to determine the strain and stress fields with the construction of residual deformations are developed, allowing one to explore the mutual influence of defects and to study the dynamics of the deformation process that leads to the destruction.