УДК 517.54

И. В. Денега

Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Рассмотрены экстремальные проблемы геометрической теории функций комплексного переменного, связанные с оценками функционалов, заданных на системах частично неналегающих областей. В частности, основное внимание уделено усилению и обобщению некоторых известных результатов данной теории.

В настоящее время экстремальные задачи о неналегающих областях занимают значительное место в геометрической теории функций комплексного переменного и имеют богатую историю (см., например, [1–12]). Впервые экстремальные разбиения рассматривались при получении оценок произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей. Эта тематика восходит к статье М. А. Лаврентьева [1] и впоследствии развивалась в работах многих иследователей (см., например, [2–12]). В данной работе усилены и обобщены некоторые результаты этой теории.

Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B\subset\overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a\in B$ (см., например, [4, 6, 8]) и $\chi(t) = \dfrac{1}{2}(t+t^{-1})$. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Систему точек $A_n := \{a_k\in\mathbb{C}\colon k=\overline{1,n}\}$ назовем n-лучевой, если $|a_k|\in\mathbb{R}^+$ при $k=\overline{1,n}$, $0=\arg a_1<\arg a_2<\dots<\arg a_n<2\pi$. Обозначим при этом $a_{n+1}:=a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k=\overline{1,n}$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}$ и $\gamma\in\mathbb{R}^+\bigcup\{0\}$ полагаем

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Пусть D — открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее лучевую систему точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$. Если $a\in D$, то будем говорить, что $D(a)$ есть связная компонента D, содержащая точку a; $D_k(a_p)$ — связная компонента множества $D(a_p)\bigcap\overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку a_p, $p=k$, $k-1$, $k=\overline{1,n}$; $D_k(0)$ — связная компонента множества $D(0)\bigcap\overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку $w=0$; $D_k(\infty)$ — связная компонента множества $D(\infty)\bigcap\overline{P_k(A_n)}$, содержащая бесконечно удаленную точку.

Внутренним радиусом $r(D,a)$ *открытого множества* D относительно точки a называется внутренний радиус связной компоненты множества D, содержащей точку a.

Пусть открытое множество D содержит точки $w=0$, $w=\infty$ и произвольную n-лучевую систему точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, тогда будем говорить, что такое множество удовлетворяет *условию неналегания* относительно системы точек A_n, если множества $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ и $D_k(\infty)$ попарно не пересекаются для каждого $k=\overline{1,n}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞, B_0 — произвольный набор областей таких, что $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$. Пусть $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \bigcup B_0 \bigcup B_\infty$. Будем говорить, что система B_∞, B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет *условию частичного неналегания* относительно некоторой системы A_n, если открытое множество $\widetilde{D}$ удовлетворяет условию неналегания относительно этой же n-лучевой системы точек A_n. Из определения совершенно очевидно, что произвольная система взаимно неналегающих областей удовлетворяет условию частичного неналегания.

Введем функцию $F(x) = 2^{x^2+6}x^{x^2+1}(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}$, $x \in (0,2]$.

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $\gamma \in (0,1]$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ и любого набора областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $k = \overline{0,n}$, удовлетворяющего условию частичного неналегания относительно лучевой системы A_n, справедливо неравенство*

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{\frac{1}{2}}\left[F\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}. \qquad (1)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $\gamma \in (0,1]$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, и любого набора областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $k = \overline{0,n}$, удовлетворяющего условию частичного неналегания относительно лучевой системы A_n, справедливо неравенство* (1). *Знак равенства в этом неравенстве достигается при условиях теоремы 1.*

В качестве следствия из теоремы 1 получаем основной результат работы [10]. Из следствия 1 также вытекает основной результат работы [9]. Отметим, что теорема 1 является значительным обобщением и усилением теоремы 4 работы [5].

Теорема 2. *Пусть $0 < \gamma \leqslant \gamma_4$, $\gamma_4 = 2{,}1$. Тогда для любой 4-лучевой системы точек $A_4 = \{a_k\}_{k=1}^4$ такой, что $\mathcal{L}^{(0)}(A_4) = 1$, и любого набора областей B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,4}$), удовлетворяющего условию частичного неналегания относительно лучевой системы A_4, справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma\prod_{k=1}^{4} r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma\prod_{k=1}^{4} r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k и точки 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1,4}$) — соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^8+(16-2\gamma)w^4+\gamma}{w^2(w^4-1)^2}dw^2.$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < \gamma \leqslant \gamma_5$, $\gamma_5 = 3{,}2$. *Тогда для любой 5-лучевой системы точек* $A_5 = \{a_k\}_{k=1}^{5}$ *такой, что* $\mathcal{L}^{(0)}(A_5) = 1$, *и любого набора областей* B_0, B_∞, B_k ($a_0 = 0 \in \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,5}$), *удовлетворяющего условию частичного неналегания относительно лучевой системы* A_5, *справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{5} r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{5} r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1,5}$) — *соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{10} + (25-2\gamma)w^5 + \gamma}{w^2(w^5-1)^2}dw^2.$$

Доказательство теоремы 1. Метод доказательства этой теоремы основан на применении разделяющего преобразования (см. [4–8]) и использует идеи работ [9, 10]. Рассмотрим открытое множество $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \bigcup B_0$. Используя неравенство $r(B_k,a_k) \leqslant r(\widetilde{D},a_k) = r(\widetilde{D}(a_k),a_k)$, получаем $r^\gamma(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant r^\gamma(\widetilde{D},0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(\widetilde{D},a_k)$. Пусть $J_n(\gamma) = r^\gamma(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)$.

Используя методы работ [4–7], получаем

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}(G_0^{(k)},0)r(G_1^{(k)},-i)r(G_2^{(k)},i)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $G_0^{(k)}$, $G_1^{(k)}$, $G_2^{(k)}$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}dw^2 \qquad (0 \in G_0^{(k)},\ -i \in G_1^{(k)},\ i \in G_2^{(k)}).$$

Далее, используя результат, полученный в работе [5] при доказательстве теоремы 4, приходим к неравенству

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1/2}\left[\prod_{k=1}^{n} F\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}.$$

Применяя методы работ [9, 10], получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r(B_k,a_k) \leqslant [r(\widetilde{D},0)r(\widetilde{D},\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r(\widetilde{D},a_k),$$

где $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \bigcup B_0 \bigcup B_\infty$. Далее, согласно методам работ [8, с. 261; 4–6] имеем

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{4} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma}\left[\prod_{k=1}^{4}\left((\sqrt{\gamma}\alpha_k)^{2\gamma\alpha_k^2+2}\,|1-\sqrt{\gamma}\alpha_k|^{-\left(1-\sqrt{\gamma}\alpha_k\right)^2}\,(1+\sqrt{\gamma}\alpha_k)^{-\left(1+\sqrt{\gamma}\alpha_k\right)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Комбинируя методы работ [5, 7, 8], получаем, что и в этом неравенстве максимум достигается при $\alpha_k = 2/n$, $k = \overline{1,4}$. Случай равенства проверяется непосредственно.

Доказательство теоремы 3 проводится с помощью рассуждений, аналогичных теореме 2.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. – 1985. – **128**, № 1. – С. 110–123.
5. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
6. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
7. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. – 1996. – **2**. – С. 96–98.
8. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН України. – Київ, 2008. – 308 с.
9. *Подвысоцкий Р. В.* Об одном неравенстве для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН Украины. – 2009. – № 12. – С. 33–37.
10. *Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Denega I. V.* Inequalities in problems on non-overlapping domains // arXiv: 1108.2383.
11. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 868–886.
12. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Там само. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596–610.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.10.2011

І. В. Денега

Деякі нерівності для внутрішніх радіусів частково неналягаючих областей

Розглянуто екстремальні проблеми геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язані з оцінками функціоналів, заданих на системах частково неналягаючих областей. Зокрема, основну увагу приділено підсиленню і узагальненню деяких відомих результатів даної теорії.

I. V. Denega

Some inequalities for inner radii of partially non-overlapping domains

The paper is devoted to extremal problems of the geometric function theory of complex variables associated with estimates of functionals defined on systems of partially non-overlapping domains. In particular, the investigation is focused on the strengthening and generalization of some known results of this theory.