УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

Модули над групповыми кольцами локально конечных групп

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Изучено $\mathbf{R}G$*-модуль* A *такой, что* $\mathbf{R}$ *— ассоциативное кольцо,* $A/C_A(G)$ *не является минимаксным* $\mathbf{R}$*-модулем,* $C_G(A) = 1$*,* G *— локально конечная группа. Рассматривается система* $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ *всех подгрупп* $H \leqslant G$*, для которых фактормодули* $A/C_A(H)$ *не являются минимаксными* $\mathbf{R}$*-модулями. Исследован* $\mathbf{R}G$*-модуль* A *такой, что* $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ *удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальности как упорядоченное множество. Описаны свойства локально конечной группы* G*, которая удовлетворяет заданным условиям.*

Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(F, A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $(n \times n)$-матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки и достаточно изучены. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы мало исследованы. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из таких условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например, [1, 2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2]. В [3] было введено другое условие конечности, налагаемое на бесконечномерные линейные группы. Авторы ввели понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть H — подгруппа группы $GL(F, A)$. H действует на факторпространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы определяют $\mathrm{centdim}_F H$ как $\dim_F(A/C_A(H))$. Говорят, что подгруппа H имеет конечную центральную размерность, если $\mathrm{centdim}_F H$ конечна, и H имеет бесконечную центральную размерность, если $\mathrm{centdim}_F H$ бесконечна.

Пусть $G \leqslant GL(F, A)$. В [3] рассматривалась система $\mathfrak{L}_{id}(G)$ всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность. Чтобы исследовать бесконечномерные линейные группы, которые по своей структуре близки к конечномерным, следует рассмотреть случай, когда система $\mathfrak{L}_{id}(G)$ "достаточно мала". Так, в [3] изучались локально разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, исследовались в [4].

Слабое условие минимальности и слабое условие максимальности являются наиболее естественными теоретико-групповыми обобщениями обычных условий минимальности и максимальности. Слабое условие минимальности было введено в рассмотрение Д. И. Зайцевым [5], а слабое условие максимальности — Р. Бэром [6]. Пусть G — группа, $\mathcal{M}$ — некоторое семейство подгрупп группы G. Говорят, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для $\mathcal{M}$-подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию минимальности, т. е. если для любого убывающего ряда подгрупп из множества $\mathcal{M}$

$$G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_n \geqslant G_{n+1} \geqslant \cdots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geqslant m$. Группа G удовлетворяет слабому условию максимальности для $\mathcal{M}$-подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию максимальности, т. е. если для любого возрастающего ряда подгрупп из множества $\mathcal{M}$

$$G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_n \leqslant G_{n+1} \leqslant \cdots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geqslant m$. В [7] изучались бесконечномерные периодические локально радикальные группы, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальности.

Если $G \leqslant GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ — кольцо. При этом обобщением понятия центральной размерности подгруппы линейной группы является понятие коцентрализатора подгруппы, введенное в [8]. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактормодуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

Исследование алгебраических систем, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности, остается достаточно актуальным. Примерами таких систем являются классы нетеровых и артиновых модулей. Напомним, что модуль называется артиновым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию минимальности. Модуль называется нетеровым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию максимальности. Естественным обобщением классов артиновых и нетеровых модулей является класс минимаксных модулей [9, гл. 7]. $\mathbf{R}$-модуль A называется минимаксным, если он обладает конечным рядом подмодулей, каждый фактор которого является либо нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, либо артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

В [10] исследовался $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо, $C_G(A) = 1$, и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Была рассмотрена система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Изучался такой $\mathbf{R}G$-модуль A, что система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, а группа G локально разрешима. Также рассматривался случай, когда система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, $C_G(A) = 1$, группа G разрешима, а $\mathbf{R}$ является кольцом целых чисел [11] и дедекиндовым кольцом [12].

В [13] изучался $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ является кольцом целых чисел, $C_G(A) = 1$, а коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. На системе $\mathfrak{L}_{nnd}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями, введен порядок относительно обычного включения подгрупп. Исследовался такой $\mathbf{R}G$-модуль A, что система $\mathfrak{L}_{nnd}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, а группа G локально разрешима.

Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — ассоциативное кольцо, G — группа, $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ — система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются минимаксными $\mathbf{R}$-модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Если $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ удовлетворяет слабому условию минимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{\min -nm}$. Если же $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ удовлетворяет слабому условию максимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{\max -nm}$.

В работе рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — произвольное ассоциативное кольцо, $C_G(A) = 1$, и коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем.

Пусть $MD(G)$ — множество всех элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x\rangle$ в модуле A является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех x, $g \in G$, отсюда вытекает, что $MD(G)$ — нормальная подгруппа группы G.

Очевидно, что черниковская группа удовлетворяет как слабому условию максимальности для подгрупп, так и слабому условию минимальности для подгрупп. Отсюда следует, что если A — $\mathbf{R}G$-модуль, а группа G является черниковской, то G удовлетворяет как условию $W_{\min -nm}$, так и условию $W_{\max -nm}$. Как оказалось, локально конечная группа G, удовлетворяющая либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$, либо черниковская, либо совпадает с подгруппой $MD(G)$.

Теорема. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, $\mathbf{R}$ — ассоциативное кольцо, G — группа. Предположим, что группа G локально конечна и удовлетворяет либо условию $W_{\min -nm}$, либо условию $W_{\max -nm}$. Тогда либо группа G черниковская, либо $G = MD(G)$.*

Эта теорема обобщает теорему 3.4 [14]. В [14] было получено описание структуры локально конечной группы G в случае, когда $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо, а условие минимаксности заменено условием артиновости.

1. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **119**, No 2. – P. 400–448.
2. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey. “Finite and locally finite groups” // NATO ASI ser. C. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – **471**. – P. 111–146.
3. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, No 1. – P. 172–186.
4. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. – 2008. – **50**. – P. 103–131.
5. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**. – С. 472–482.
6. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Ann. – 1968. – **175**. – P. 1–43.
7. *Muñoz-Escolano J. M., Otal J., Semko N. N.* Periodic linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension // Commun. Algebra. – 2008. – **36**. – P. 749–763.
8. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Институт математики АН Украины, 1993. – С. 160–177.
9. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N.* Insight into modules over Dedekind domains // Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2008. – 119 p.
10. *Дашкова О. Ю.* Об одном классе модулей над групповыми кольцами локально разрешимых групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 2. – С. 94–98.
11. *Дашкова О. Ю.* Об одном классе модулей над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 44–51.

12. *Дашкова О. Ю.* Об одном классе модулей над групповыми кольцами разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп // Фундамент. и прикл. математика. – 2008. – **14**, № 7. – С. 111–119.
13. *Дашкова О. Ю.* Модули над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп // Доп. НАН України. – 2009. – № 2. – С. 14–19.
14. *Дашкова О. Ю.* О модулях над групповыми кольцами локально конечных групп // Пробл. физики, математики и техники. – 2011. – № 4(9). – С. 100–105.

Днепропетровский национальный университет

Поступило в редакцию 14.10.2011

О. Ю. Дашкова

Модулі над груповими кільцями локально скінченних груп

Вивчено $\mathbf{R}G$-модуль A такий, що $\mathbf{R}$ — асоціативне кільце, $A/C_A(G)$ не є мінімаксним $\mathbf{R}$-модулем, $C_G(A) = 1$, G — локально скінченна група. Розглядається система $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ усіх підгруп $H \leqslant G$, для яких фактормодулі $A/C_A(H)$ не є мінімаксними $\mathbf{R}$-модулями. Досліджено $\mathbf{R}G$-модуль A такий, що $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ задовольняє або слабку умову мінімальності, або слабку умову максимальності як упорядкована множина. Описано властивості локально скінченної групи G, яка задовольняє ці умови.

O. Yu. Dashkova

Modules over group rings of locally finite groups

The author studies an $\mathbf{R}G$-module A such that $\mathbf{R}$ is an associative ring, $A/C_A(G)$ is not a minimax $\mathbf{R}$-module, $C_G(A) = 1$, G is a locally finite group. Let $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ be a system of all subgroups $H \leqslant G$ such that the quotient modules $A/C_A(H)$ are not minimax $\mathbf{R}$-modules. An $\mathbf{R}G$-module A such that $\mathfrak{L}_{nm}(G)$ satisfies either weak minimal condition or weak maximal condition as an ordered set is investigated. The properties of a locally finite group G under these conditions are described.