Доповіді
національної
академії наук
України

7 • 2012

УДК 519.71

Член-кореспондент НАН України **С. І. Ляшко, Д. А. Клюшин, Г. М. Стешенко**

Існування і єдиність слабкого розв'язку системи рівнянь параболічного типу з сингулярними правими частинами

Отримано апріорні нерівності для системи параболічних рівнянь із сингулярними правими частинами, що описують точкові джерела фізичних полів, та доведено існування єдиного розв'язку задачі про дифузивно-конвективний перенос суміші ізотопів у пористому середовищі з урахуванням явища філіації.

Задача математичного моделювання конвективної дифузії суміші ізотопів на даний час вивчена досить мало. Серед основних робіт на цю тематику зазначимо статті Шоке [1, 2], Шоке і Цимермана [3] та Дугласа і Спаньоло [4]. В даній роботі, розглянувши лінійний варіант моделі Шоке з точковими джерелами та застосувавши теорію, яка була детально розроблена в роботах С. І. Ляшка та його однодумців [5, 6], ми поставили задачу довести існування єдиного розв'язку даної задачі.

Постановка задачі. Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$. Розглянемо в циліндричній області $Q = \{(0 < t < T) \times \Omega\}$ початково-крайову задачу

$$LU = F, \tag{1}$$

де

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_1} + D_{u_1} & -a_1(x) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_2} + D_{u_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_{Y-1}} + D_{u_{Y-1}} & -a_{Y-1}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_Y} + D_{u_Y} \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix}u_1(x,t)\\u_2(x,t)\\\dots\\u_Y(x,t)\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\dots\\f_Y(x)\end{pmatrix}.$$

Початково-крайові умови матимуть вигляд

$$u_s(x,t)=0,\qquad x\in\partial\Omega,\qquad s=\overline{1,\dots,Y},\qquad u_s(x,0)=0,\qquad k=\overline{1,\dots,Y},\tag{2}$$

сама система рівнянь конвективної дифузії —

$$\begin{aligned}
&u_{1t}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{1ij}(x)u_{1x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_{1i}(x)u_{1x_i}+a_1(x)(u_1-u_2)=f_1(x),\\
&u_{2t}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{2ij}(x)u_{2x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_{2i}(x)u_{2x_i}+a_2(x)(u_2-u_3)=f_2(x),\\
&\dots\\
&u_{nt}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{nij}(x)u_{2x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)u_{2x_i}+a_n(x)u_n=f_n(x).
\end{aligned}\tag{3}$$

Нехай коефіцієнти системи (3) задовольняють умови

$$\begin{aligned}
&a_{si,j}=a_{sji}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\qquad a_{si}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\qquad s=\overline{1,\dots,Y},\\
&a_s(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\qquad s=\overline{1,\dots,Y},
\end{aligned}\tag{4}$$

а також виконуються такі нерівності:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n}a_{sij}\xi_i\xi_j\geqslant k_s\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\qquad s=\overline{1,\dots,Y},\\
&\sum_{i=1}^{n}a_{si}(x)\leqslant a_s(x),\qquad s=\overline{1,\dots,Y},\\
&\sum_{i=1}^{n}(a_{si}(x))_{x_i}\leqslant a_s(x),\qquad s=\overline{1,\dots,Y},\\
&a_s(x)\geqslant 0,\qquad s=\overline{1,\dots,Y}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Областю визначення $D(L)$ оператора L є множина функцій з $(C^\infty(\overline{Q}))^n$, що задовольняють умови (2).

Для дослідження в просторах H та $L_2(Q)$ введемо скалярний добуток і такі норми:

$$\|u\|^2_{L_2}(Q)=\int\limits_Q u^2dQ,\qquad (u,\upsilon)_{L_2(Q)}=\int\limits_Q u\upsilon dQ,$$

$$\|u\|^2_H(Q)=\int\limits_Q\left((u)^2_t+\sum_{i=1}^{2}(u)^2_{x_i}+\sum_{i,j=1}^{2}(u)^2_{x_ix_j}\right)dQ$$

та розглянемо простори H^K та $(L_2(Q))^K$ вектор-функцій $U=(u_1,u_2,\ldots,u_K)$ та $H^{K\times M}$ і $(L_2(Q))^{K\times M}$ матриць-функцій $U=\begin{pmatrix}u_{11} & \ldots & u_{1K}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ u_{M1} & \ldots & u_{MK}\end{pmatrix}$, де u_k та u_{mk} належать H та $L_2(Q)$ відповідно, і введемо скалярний добуток і норми:

$$(U,V)_{L_2^K}=\sum_{k=1}^{K}\int\limits_Q u_k\upsilon_k dQ,\qquad (U,V)_{L_2^{K\times M}}=\sum_{k,m=1}^{K,M}\int\limits_Q u_{km}\upsilon_{km}dQ,$$

$$\|U\|^2_{L_2^K}(Q)=\int\limits_Q\sum_{k=1}^{K}(u_k)^2dQ,\qquad \|U\|^2_{L_2^{K\times M}}(Q)=\int\limits_Q\sum_{k,m=1}^{K,M}(u_{km})^2dQ,$$

$$\|U\|^2_{H^K}(Q)=\int\limits_Q\sum_{k=1}^{K}\left((u_k)^2_t+\sum_{i=1}^{2}(u_k)^2_{x_i}+\sum_{i,j=1}^{2}(u_k)^2_{x_ix_j}\right)dQ,$$

$$\|U\|^2_{H^{K\times M}}(Q)=\int\limits_Q\sum_{k,m=1}^{K,M}\left((u_{km})^2_t+\sum_{i=1}^{2}(u_{km})^2_{x_i}+\sum_{i,j=1}^{2}(u_{km})^2_{x_ix_j}\right)dQ.$$

Формально спряжений оператор записується в такому вигляді:

$$VL^*=G,$$

$$\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & \ldots & v_Y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}L_1^* & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -a_1(x) & L_2^* & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & L_{Y-1}^* & 0\\ 0 & 0 & \ldots & -a_{Y-1}(x) & L_Y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1 & g_2 & \ldots & g_Y\end{pmatrix},$$

$$L_1^*=-\nu_{1t}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{1ij}\nu_{1x_j})_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}a_{1x_i}\nu_{1x_i}+a_1(x)\nu_1, \tag{6}$$

$$L_2^*=-\nu_{2t}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{2ij}\nu_{2x_j})_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}a_{2x_i}\nu_{2x_i}+a_2(x)\nu_2,$$

$$\ldots$$

$$L_Y^*=-\nu_{Yt}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{Yij}\nu_{Yx_j})_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}a_{Yx_i}\nu_{Yx_i}+a_Y(x)\nu_Y.$$

Областю визначення $D(L^*)$ оператора L^* є множина функцій $(C^\infty(\overline{Q}))^n$, що задовольняє умови

$$\nu_s(x,t)=0, \qquad x\in\partial\Omega, \qquad s=\overline{1,\ldots,Y}, \qquad \nu_s(x,T)=0, \qquad s=\overline{1,\ldots,Y}. \tag{7}$$

Простір H_+ — поповнення простору $D(L^*)$ за аналогічною нормою з H.

По парам H, $L_2(Q)$ та H_+, $L_2(Q)$ побудуємо негативні простори $(H)^*$ та $(H_+)^*$, а по парам H^K, $(L_2(Q))^K$ та H_+^K, $(L_2(Q))^K$ — негативні простори $(H_+)^*$ та $(H_+^K)^*$, поповнюючи $L_2(Q)$ та $(L_2(Q))^K$ за нормами:

$$\|f\|_{(H)^*}=\sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}}\frac{|(f,u)_{L_2(Q)}|}{\|u\|_H}, \qquad \|F\|_{(H^K)^*}=\sup_{\substack{U\in H^K\\ U\neq 0}}\frac{|(F,U)_{(L_2(Q))^K}|}{\|U\|_{H^K}},$$

$$\|f\|_{(H_+)^*}=\sup_{\substack{v\in H_+\\ v\neq 0}}\frac{|(f,v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{H_+}}, \qquad \|F\|_{(H_+^K)^*}=\sup_{\substack{V\in H_+^K\\ V\neq 0}}\frac{|(F,V)_{(L_2(Q))^K}|}{\|V\|_{H_+^K}}.$$

Має місце ланцюжок щільних вкладень просторів:

$$H\subset L_2(Q)\subset (H)^*, \qquad (H^K)\subset (L_2^K(Q))\subset (H^K)^*,$$

$$H_+\subset L_2(Q)\subset (H_+)^*, \qquad (H_+^K)\subset (L_2^K(Q))\subset (H_+^K)^*,$$

c_i — константи, $c_i\geqslant 0$ і не залежить від U та V.

Апріорні нерівності та теореми про існування і єдиність слабкого розв'язку. Для даної постановки задачі отримано такі леми та теореми.

Лема 1. *Для довільної функції $U(t,x)\in D(L)$ має місце оцінка*

$$\|LU\|_{L_2^Y(Q)}\leqslant C_1\|U\|_{H^Y}.$$

Лема 2. *Для довільної функції $V(t,x)\in D(L^*)$ має місце оцінка*

$$\|L^*V\|_{L_2^Y(Q)}\leqslant C_1\|V\|_{H_+^Y}.$$

Лема 3. *Для довільної функції $U(t,x)\in H$ має місце оцінка*

$$C_1\|U\|_{H^Y}\leqslant \|LU\|_{L_2^Y(Q)}.$$

Лема 4. *Для довільної функції $V(t,x)\in D(L^*)$ має місце оцінка*

$$C_1\|v\|_{H_+^Y}\leqslant \|L^*V\|_{L_2^Y(Q)}.$$

Теорема 1. *Для будь-якого елемента $F\in (L_2(Q))^Y$ існує єдиний розв'язок $U\in H^Y$ операторного рівняння $LU=F$ в нормі простору $(L_2(Q))^Y$.*

Теорема 2. *Для будь-якого елемента $F\in (L_2(Q))^Y$ існує єдиний розв'язок $V\in H_+^Y$ операторного рівняння $VL^*=G$.*

Теорема 3. *Для будь-якого елемента $F\in (H_+^Y)^*$ існує єдиний слабкий розв'язок $U\in$ $\in (L_2(Q))^Y$ задачі $LU=F$.*

Теорема 4. *Для будь-якого елемента* $G \in (H^Y)^*$ *існує єдиний слабкий розв'язок* $V \in \in (L_2(Q))^Y$ *задачі* $VL^* = G$.

В роботі отримані апріорні нерівності для параболічних систем із сингулярними правими частинами, що описують точкові джерела радіоактивного забруднення, а також доведено існування єдиного слабкого розв'язку задачі конвекції-дифузії суміші ізотопів у пористому середовищі з урахуванням явища філіації.

1. *Choquet C.* Radionuclide transport model with wells // Asymptotic Analysis. – 2004. – **37**. – P. 57–78.
2. *Choquet C.* Existence result for a radionuclide transport model with unbounded viscosity // J. of Math. and Fluid Mechanics. – 2004. – **6**. – P. 365–388.
3. *Choquet C., Zimmermann S.* Study of a finite volume-finite element scheme for a nuclear transport model. — http://arxiv.org/abs/0704.1286.
4. *Douglas J. Jr.* The transport of nuclear contamination in fractured porous media // J. of Korean Math. Society. – 2001. – **38**. – 723–761 p.
5. *Ляшко С. И.* Моделирование и оптимизация подземного массопереноса. – Киев: Наук. думка, 1998. – 240 с.
6. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 472 с.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.11.2011

Член-корреспондент НАН Украины **С. И. Ляшко, Д. А. Клюшин, Г. Н. Стешенко**

Существование и единственность слабого решения системы уравнений параболического типа с сингулярными правыми частями

Получены априорные неравенства для системы параболических уравнений с сингулярными правыми частями, описывающими точечные источники физических полей, и доказано существование единственного решения задачи диффузно-конвективного переноса смеси изотопов в пористой среде с учетом филиации.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **S. I. Lyashko, D. A. Klyushin, G. M. Steshenko**

Existence and uniqueness of the weak solution of a system of equations of the parabolic type with singular right-hand sides

A priori inequalities for a system of parabolic equations with singular right-hand sides describing the point sources of physical fields are obtained, and the existence of a unique solution of the problem of diffusion-convection transport of an isotope mixture in porous medium with regard for the filiation is proved.