УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

О стабилизации движения систем с последействием импульсными возмущениями

Исследуется класс механических систем, описываемых уравнениями с последействием и импульсными возмущениями. С помощью метода Ляпунова–Разумихина и функций Ляпунова, определенных на произведении пространств, установлены достаточные условия устойчивости.

Импульсное возмущение может стабилизировать и/или дестабилизировать движение нелинейной системы с последействием. Цель данной работы — получение условий стабилизации движения системы с последействием на основе двух подходов: путем применения функций Ляпунова–Разумихина и функций Ляпунова на произведении пространств.

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения с последействием вида

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x_t), \qquad t \geqslant t_0, \\ &x(\sigma) = \varphi(s) \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \qquad \sigma \geqslant t_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $x_t \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $f\colon \mathbb{R}_+ \times PC \times \to \mathbb{R}^n$; $PC = PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство кусочно-непрерывных справа функций $\varphi\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$; $S(H) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < H\}$.

Пусть $|\varphi| = \sup\limits_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} \|\varphi(s)\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^n$ и $x_t(s) = x(t+s)$ при $-\tau \leqslant s \leqslant 0$; dx/dt обозначает правую производную вектора состояния системы (1).

Наряду с системой (1) будем рассматривать уравнения возмущенного движения системы при импульсных возмущениях

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x_t, \alpha), \qquad t \neq \tau_k, \\ &\Delta x = I_k(t, x(t^-)), \qquad t = \tau_k, \qquad k \in \mathbb{N}_+, \end{aligned} \tag{2}$$

где $I_k\colon \mathbb{R}_+ \times S(H) \to \mathbb{R}^n$, $\Delta x = x(t) - x(t^-)$; $t_0 < \tau_k < \tau_{k+1}$, $\tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $k \in \mathbb{N}_+$; $\mathbb{N}_+$ — множество всех положительных чисел.

Движение системы с последействием (1) стабилизируемо с помощью импульсных возмущений, если существует последовательность моментов $\{\tau_k\}$, $\tau_k - \tau_{k-1} \neq 0$, и последовательность соответствующих вектор-функций $\{I_k(x)\}$, $k \in \mathbb{N}_+$, таких, что нулевое решение системы (2) обладает определенным типом устойчивости, более сильным, чем устойчивость состояния $x = 0$ системы (1). Например, нулевое решение системы (1) может быть устойчивым, но не асимптотически, в то время как импульсное возмущение упрочняет движение системы (2) до асимптотически или экспоненциально устойчивого.

Наша задача — получить условия стабилизации движения системы (1) при помощи импульсных возмущений.

О классе вспомогательных функций для системы (1). Для системы (1) будем применять функцию

$$V_2(t,x) = \theta^T U(t,*)\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}^2_+, \tag{3}$$

где

$$U(t,*) = \begin{pmatrix} v_{11}(t,x_1) & v_{12}(t,x_1,x_2) \\ v_{21}(t,x_1,x_2) & v_{22}(t,x_2) \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1+n_2 = n$, $v_{11}(t,x_1)\colon \mathbb{R}_+ \times S(H_1) \to \mathbb{R}_+$, $v_{22}(t,x_2)\colon \mathbb{R}_+ \times S(H_2) \to \to \mathbb{R}_+$ и $v_{12}(t,x_1,x_2) = v_{21}(t,x_1,x_2)\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$, $S(H_1) = \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}\colon \|x_1\| < H_1\}$, $S(H_2) = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}\colon \|x_2\| < H_2\}$, $H_1, H_2 > 0$.

Заметим, что для некоторых классов систем вида (1) матричная функция $U(t,*)$ может быть построена в явном виде путем решения матричных уравнений Ляпунова и специального уравнения для определения элемента $v_{12}(t,x_1,x_2)$.

Функция (3) удовлетворяет условию B_2, если:

а) $V_2(t,x)$ непрерывна на любом множестве $[\tau_{k-1},\tau_k) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и при всех x, $y \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}_+$ существует предел $\lim\limits_{(t,y)\to(\tau_k^-,x)} = V_2(\tau_k^-,x)$;

б) $V_2(t,x)$ — локально липшицева по $x \in \mathbb{R}^n$ и $V_2(t,0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Теоремы о стабилизации решений системы (1). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *построена функция* $V_2(t,x)$, *удовлетворяющая условию* B_2. *Кроме того, существуют постоянные* p, c_1, c_2, $\lambda > 0$ *и* $\beta > \tau$ *такие, что*

1) $c_1\|x\|^p \leqslant V_2(t,x) \leqslant c_2\|x\|^p$ *при всех* $t \geqslant t_0$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

2) вдоль решений системы (1) *верна оценка*

$$D^+V_2(t,\varphi(0))\big|_{(1)} \leqslant 0$$

при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$, *как только* $qV_2(t,\varphi(0)) \geqslant V_2(t+s,\varphi(s))$ *при* $s \in [-\tau,0]$, $q \geqslant e^{2\lambda\beta}$*;*

3) существуют постоянные $d_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_+$, *такие, что* $V_2(\tau_k,\varphi(0)+I_k(\varphi)) \leqslant \leqslant d_kV_2(\tau_k^-,\varphi(0))$*;*

4) при всех $k \in \mathbb{N}_+$ $\tau \leqslant \tau_k - \tau_{k-1} \leqslant \beta$ *и* $\ln(d_k) + \lambda\beta < -\lambda(\tau_{k+1}-\tau_k)$.

Тогда состояние $x = 0$ *системы* (1) *экспоненциально устойчиво в целом.*

Доказательство. Пусть $x(t,\varphi) = x(t,t_0,\varphi)$ — любое решение системы (1) с начальной функцией $x_{t_0} = \varphi$. Оценим $c_2|\varphi|^p$ так: выберем $m > 0$ при заданном q таким, чтобы

$$c_2|\varphi|^p < m|\varphi|^p e^{-\lambda(\tau_1-\tau_0)} \leqslant qc_2|\varphi|^p.$$

При выполнении условий теоремы 1 нетрудно показать, что

$$V_2(t,x(t,\varphi)) \leqslant m|\varphi|^p e^{-\lambda(t-t_0)}$$

при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$. Поэтому в силу условия *1* теоремы 1 имеем

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant m^*|\varphi| e^{-\frac{\lambda}{p}(t-t_0)}$$

при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$, где $m^* \geqslant \max\{1,(m/c_1)^{1/p}\}$. Этим теорема 1 доказана.

При известных ограничениях на элементы $v_{ij}(t,\cdot)$ матричной функции $U(t,*)$ величины c_1, c_2 вычисляются в явном виде как собственные значения специальных матриц.

Заметим, что условие *2* теоремы 1 для системы с последействием без импульсных возмущений не гарантирует устойчивость состояния $x = 0$. Действие импульсных возмущений стабилизирует движение системы (1).

Далее применим функцию Ляпунова на произведении пространств $\mathbb{R}^n$ и $PC([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. *Предположим, что для системы* (1) *построена функция* (3) *со слагаемыми* $V_1(t,\varphi,\eta)$ *и* $V_2(t,x,\eta)$*, удовлетворяющими условиям* B_0, B_2 *соответственно. Кроме того, существуют постоянные* $0 < p_1 < p_2$ *и* β, μ, c, c_1, c_2, $c_3 > 0$, $d_k \geqslant 0$ *при* $k \in \mathbb{N}_+$ *такие, что*

1) $c_1\|x\|^{p_1} \leqslant V_2(t,x) \leqslant c_2\|x\|^{p_1}$, $0 \leqslant V_1(t,\varphi) \leqslant c_3|\varphi|^{p_2}$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in PC([-\tau,0),\mathbb{R}^n)$*;*

2) при любом $k \in \mathbb{N}_+$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$ *верна оценка*

$$V_2(\tau_k, x + I_k(x)) \leqslant d_k V_2(\tau_k^-, x);$$

3) для функции $V(t,\psi) = V_1(t,\psi) + V_2(t,\psi(0))$ *выполняется оценка*

$$D^+V(t,\psi)\big|_{(1)} \leqslant cV(t,\psi)$$

при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$, $\psi \in PC([-\tau,0),\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_+$*;*

4) при любых $k \in \mathbb{N}_+$ $\tau \leqslant \tau_k - \tau_{k-1} \leqslant \mu$ *и* $\ln\left(d_k + \dfrac{c_3}{c_1}e^{(p_2/p_1-1)ck\mu}\right) \leqslant -(\beta + c)\mu$.

Тогда состояние $x = 0$ *системы* (1) *экспоненциально устойчиво в целом.*

Доказательство. Пусть $x(t,\varphi)$ — любое решение системы (1) с начальной функцией $\varphi \in PC(\delta)$. Для заданного значения $\varepsilon \in (0,1]$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_2\delta^{p_1} + c_3\delta^{p_2} < c_1\varepsilon^{p_1}e^{-(\beta+c)\mu}. \tag{4}$$

Из условия *3* теоремы 2 следует, что

$$V(t) \leqslant V(\tau_{k-1})e^{c(t-\tau_{k-1})} \tag{5}$$

при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$. Применяя оценки (4) и (5) для $k = 1$ и $k = j + 1$, нетрудно показать, что при выполнении условий (1)–(4) теоремы 2 верна оценка $V(t) < c_1\varepsilon^{p_1}e^{-(\beta+c)k\mu}e^{c(t-t_0)}$ и при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$, $\|x(t,\varphi)\| < \varepsilon e^{-(\beta/p_1)(t-t_0)}$. Этим теорема 2 доказана.

Заметим, что условие *3* теоремы 2 допускает, что $D^+V(t,\varphi)|_{(1)} > 0$ при $t \neq \tau_k$, $k \in \mathbb{N}_+$, при $\psi(0) \neq 0$. Это означает, что непрерывная компонента системы (1) может быть неустойчивой. С другой стороны, условие *4* устанавливает связь между частотой импульсов и ростом функции $V(t,\psi)$, при которых импульсные возмущения стабилизируют движение системы (1) к экспоненциально устойчивому в целом.

Пример. Рассмотрим систему с последействием второго порядка (см. [3])

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + a(t)x(t-\tau) = 0, \qquad t \geqslant t_0,$$

$$x(t) = \varphi(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = \psi(t), \qquad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0,$$

и соответствующую ей систему с импульсным возмущением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + a(t)x(t-\tau) = 0, \qquad t \neq \tau_k,$$
$$x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k^-)),$$
$$\frac{dx}{dt}(\tau_k) = J_k\left(\frac{dx}{dt}(\tau_k^-)\right),$$
$$x(t) = \varphi(t),$$
$$\frac{dx}{dt} = \psi(t), \qquad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0,$$

где $t_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < \cdots$, $k \in \mathbb{N}_+$, $\lim \tau_k = +\infty$ при $k \to \infty$, I_k, J_k, φ и $\psi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $I_k(0) = J_k(0) = 0$ при $k \in \mathbb{N}_+$.

Пусть параметры $a(t)$, $b(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ и существуют постоянные $\overline{a}$, $\overline{b}$ такие, что $|a(t)| \leqslant \overline{a}$, $|b(t)| \leqslant \overline{b}$ при всех $t \in [t_0, \infty)$, $\overline{a}, \overline{b} > 0$. Пусть импульсные возмущения происходят в моменты $\{\tau_k\}$ такие, что $\theta_1 \leqslant \tau_k - \tau_{k-1} \leqslant \theta_2$, где $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\theta_2 < +\infty$.

Рассмотрим последовательность функций $\{I_k(u) = J_k(u)\}$, где $I_k(u) = (d_k/2)^{1/2}u$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$. Если существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$\ln(d_k + \overline{a}\theta_1) < -(\alpha + 1 + \overline{a} + 2\overline{b})\theta_2,$$

где $\theta_1 = \tau$, $\theta_2 < +\infty$, то движение системы с последействием стабилизируемо импульсными возмущениями до экспоненциальной устойчивости в целом.

1. *Мартынюк А. А., Мартынюк-Черниенко Ю. А.* О робастной устойчивости систем с последействием // Доп. НАН України. – 2012. – № 8. – С. 47–53.
2. *Yan J., Shen J.* Impulsive stabilization of functional differential equations by Lyapunov–Razumikhin functions // Nonlinear Analysis. – 1999. – **37**. – P. 245–255.
3. *Wang Q.* Stability and boundedness of impulsive systems with time delay. – Waterloo: Univ. of Waterloo, 2007. – 204 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 28.12.2011

Академік НАН України **А. А. Мартинюк**

Про стабілізацію руху систем з післядією імпульсними збуреннями

Досліджується клас механічних систем, що описуються рівняннями з післядією та імпульсними збуреннями. За допомогою методу функцій Ляпунова–Разуміхіна та функцій Ляпунова, означених на добутку просторів, встановлено достатні умови стійкості.

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

On the stabilization of a motion of systems with delay by impulses

We investigate a class of mechanical systems, which are described by the equations with delay and impulsive perturbation. By using the method of Lyapunov–Razumikhin and Lyapunov functions defined on a product of spaces, the sufficient stability criteria are established.