УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. М. Ковалев, В. Н. Неспирный, А. С. Суйков**

Существование функции со знакопостоянной производной для автономных систем дифференциальных уравнений

Для автономной системы дифференциальных уравнений при условии выполнения условий существования и единственности решений в окрестности стационарной точки доказано существование функции, производная которой в силу системы является знакопостоянной. При доказательстве использованы результаты Н. Н. Красовского и Х. Л. Массеры.

Появление дополнительных функций [1, 2] внесло конструктивный элемент в теорию устойчивости движения, связанный с процедурой построения функций Ляпунова. Исходным этапом в построении функции Ляпунова стало получение функции, имеющей знакопостоянную производную в силу системы, которая затем преобразуется к виду, когда множество обращения в ноль ее производной является инвариантным. Преобразованная функция позволяет решать все задачи устойчивости, включая и частичную устойчивость [3]. Учитывая важность такой функции, встал вопрос о ее существовании, который тесно связан с задачей о существовании функции со знакоопределенной производной, поставленной и решенной Н. Н. Красовским [4]. Опираясь на результаты Н. Н. Красовского [4] и Х. Л. Массеры [5], в настоящей работе доказана теорема о существовании функции, имеющей знакопостоянную производную.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f \in C, \qquad f(0) = 0. \tag{1}$$

Для произвольной функции $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ через $\dot{g} = \langle \nabla g, f \rangle$ будем обозначать производную этой функции вдоль произвольной траектории системы (1). Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, введем обозначения $B(x_0, \varepsilon) = \{x\colon |x - x_0| < \varepsilon\}$ — окрестность точки x_0 радиуса ε, $x(t; x_0)$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$.

Рассмотрим вопрос о существовании функции $V(x)$, производная которой в силу системы (1) является знакопостоянной функцией. Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос, и ее доказательство определяет некоторый способ построения искомой функции.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *в некоторой области M выполнены условия существования и единственности решений. Если в любой окрестности начала координат $B_\varepsilon \subset M$, существует точка $x_0 \in B_\varepsilon$ такая, что решение $x(t; x_0)$ в некоторый момент времени T (возможно $T < 0$) покидает множество M, т. е. $x(T, x_0) \notin M$, то существует непрерывная функция V, не равная нулю тождественно, производная $\dot{V}$ которой в силу системы* (1) *непрерывна и отрицательно постоянна на множестве M.*

2. Классификация траекторий автономной системы. Зафиксируем число r и будем рассматривать окрестность нуля

$$M = B(0, r) = \{x\colon |x| \leqslant r\}, \tag{2}$$

а также множество

$$M^{\epsilon} = B(0, r + \varepsilon_0) = \{x\colon |x| < r + \varepsilon_0\}, \qquad \varepsilon_0 > 0. \tag{3}$$

Разобьем M на подмножества согласно характеру поведения траекторий:

$$\begin{aligned}
&M_1 = \{x_0 \in M\colon \exists\, t_1 \leqslant 0, \varepsilon_0 > 0\colon x(t_1 - \varepsilon) \notin M\, \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0,\ x(t; x_0) \in M\, \forall\, t > t_1,\\
&\qquad \lim_{t \to +\infty} x(t; x_0) = 0\},\\
&M_2 = \{x_0 \in M\colon \exists\, t_2 \geqslant 0,\ \varepsilon_0 > 0\colon x(t_2 + \varepsilon) \notin M\, \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0,\ x(t; x_0) \in M\, \forall\, t < t_2,\\
&\qquad \lim_{t \to -\infty} x(t; x_0) = 0\},\\
&M_2 = \{x_0 \in M\colon \exists\, t_1 \leqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_1 \neq t_2,\ \varepsilon_0 > 0\colon x(t_1 - \varepsilon; x_0) \notin M,\\
&\qquad x(t_2 + \varepsilon, x_0) \notin M,\ \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0, x(t; x_0) \in M, \forall\, t\colon t_1 \leqslant t \leqslant t_2\},\\
&M_0 = M \setminus M_{123}, \qquad M_{123} = M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь множества M_i, $i = \overline{1, 3}$, совпадают с одноименными множествами, определенными в работе [4]. Однако в отличие от случая Красовского, множество M_0 (содержащее целые траектории или полутраектории, целиком лежащие в M) может быть непусто.

Введем также обозначения для границы множества M:

$$M^* = \partial M = \{x\colon |x| = r\}, \qquad M_i^* = M_i \bigcap M^*.$$

Множества M_i, очевидно, инвариантны. Точную структуру множества M_0 не всегда просто определить, однако легко показать, что M_0 принадлежат траектории, полностью лежащие в M.

3. Построение функции. Учитывая результаты Массеры [5] и Красовского [4], можно предложить следующий вид функции V:

$$V(x) = \gamma(x) V_0(x), \qquad V_0(x_0) = \begin{cases} 0, & x_0 \in M_0,\\ \displaystyle\int_0^{+\infty} G(|x(t; x_0)|)\, dt, & x_0 \in M_1,\\ \displaystyle\int_0^{-\infty} G(|x(t; x_0)|)\, dt, & x_0 \in M_2,\\ \displaystyle\int_{T(x)}^{0} G(|x(t; x_0)|)\, dt, & x_0 \in M_3. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $T(x) = (t_1 + t_2)/2$, где $t_1 > 0$, $t_2 < 0$ — моменты времени, когда траектория достигает M^*. Согласно [4], функция $V_0(x)$ непрерывна на M_{123}, а ее производная $\dot{V}_0(x)$ положительно определена на M_{123}. Это означает, что $\dot{V}_0(x) \geqslant 0$ на M. Функция $\gamma(x)$, определенная на всем множестве M, должна выбираться так, чтобы функция V оставалась непрерывной на M, а $\dot{V}$ — положительно постоянной. То есть $\gamma(x)$ предназначена для сглаживания возможных разрывов функции $V_0(x)$ без потери других требуемых свойств. В тривиальном случае $M_0 = \{0\}$ достаточно взять $\gamma(x) \equiv 1$, однако в случае более сложного M_0 такой выбор не может гарантировать непрерывности.

Введем функцию $\overline{\gamma}$, определенную на M^*:

$$\begin{aligned}
&\overline{\gamma}(x)\colon M^* \to \mathbb{R}; \qquad \overline{\gamma} \in C^1,\\
&\overline{\gamma}(x) = \nabla\overline{\gamma}(x) = 0 \qquad \text{при} \qquad x \in M_0^*,\\
&\overline{\gamma}(x) \geqslant 0 \qquad \text{при} \qquad x \in M_1^* \bigcup M_2^* \bigcup M_3^*,\\
&\overline{\gamma}(x(t_1, x_0)) = \gamma(x(t_2, x_0)) \qquad \forall\, x_0 \in M_3,
\end{aligned} \tag{6}$$

и определим

$$\gamma(x_0) = \begin{cases} 0, \qquad x_0 \in M_0,\\ \overline{\gamma}(x(t_1; x_0)), \qquad x_0 \in M_1,\\ \overline{\gamma}(x(t_2; x_0)), \qquad x_0 \in M_2,\\ \overline{\gamma}(x(t_1, x_0)) = \overline{\gamma}(x(t_2, x_0)), \qquad x_0 \in M_3, \end{cases} \tag{7}$$

где $t_1 > 0$, $t_2 < 0$ — моменты времени, когда траектория достигает границы множества M.

Для доказательства основной теоремы потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Утверждение 1. *Пусть f_1, f_2: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Если f_1 непрерывна в x_0 и $f_1(x_0) = 0$, а f_2 ограничена в некоторой окрестности x_0, то $f_1 f_2$ непрерывна в x_0.*

Доказательство. Пусть $B(x_0, r)$ — окрестность x_0 и $|f_2(x)| \leqslant m$ при $x \in B(x_0, r)$. Непрерывность f_1 в x_0 значит, что $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $|f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Но тогда

$$|f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| \leqslant m|f_1(x) - f_1(x_0)| < m\epsilon$$

при тех же x, что и означает непрерывность $f_1 f_2$ в точке x_0.

Утверждение 2 (непрерывность траекторий). *Пусть для системы* (1) *известно решение $x(t; x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и пусть в некоторой окрестности*

$$D = \Bigl\{x\colon \min_{0 \leqslant t \leqslant T} |x - x(t; x_0)| < d\Bigr\}$$

выполнены условия существования и единственности решений системы (1). *Тогда*

$$\forall\, \epsilon \in (0, d) \quad \exists\, \delta > 0: \quad x_* \in B(x_0, \delta) \Rightarrow |x(t; x_*) - x(t; x_0)| < \epsilon \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Для доказательства используется непрерывная зависимость решений (1) от начальных условий в обычной формулировке.

Утверждение 3. *Множество M_{123} открыто в M, т. е. если $x_0 \in M_{123}$ и $B(x_0, \varepsilon) \subset M$ для некоторого ε, то $B(x_0, \varepsilon) \subset M_{123}$.*

Доказательство. По определению M_{123}, существует отрезок траектории $x(t; x_0)$, лежащий в M при $0 \leqslant t \leqslant t^*$ (либо $t^* \leqslant t \leqslant 0$), для которого $x(t + \delta; x_0) \notin M$ для некоторого малого δ. M замкнуто, поэтому существует q: $B(x(t^*;x_0),q)$. Но тогда из утверждения 2 следует, что существует $B(x_0,\varepsilon)$: $x(x',t') \in B(x(t^*;x_0),q)$ для любого $x' \in B(x_0,\varepsilon)$ при соответствующем выборе t'.

Утверждение 4. *Пусть $\{x_i\}$, $x_i \in M_{123}$, — сходящаяся последовательность,*

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x_0, \qquad x_0 \notin M_{123}, \qquad x_0 \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{i\to\infty} \gamma(x_i) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Поскольку $\{x_i\} \subset M_{123}$, то для каждого x_i существует точка $x_i^* = x(t^*;x_i) \in M_{123}^*$, а если $x_i \in M_3$, то кроме x_i^* существует также вторая точка x_i^{**} и момент времени t^{**} с такими же свойствами. Рассмотрим последовательность X^*, составленную из точек x_i^* и, для тех i, для которых они существуют, x_i^{**}, и соответствующую последовательность T моментов времени t^* и t^{**}.

Выберем произвольную сходящуюся подпоследовательность $\{x_{i_k}^*\}$ из X^*,

$$\lim_{k\to\infty} x_{i_k}^* = x_0^*,$$

и соответствующую ей подпоследовательность $\{t_{i_k}\}$ из T. Из непрерывной зависимости от начальных условий следует, что существует конечный либо бесконечный предел t_{i_k}.

Пусть $\lim t_{i_k} = t^*$, т. е. предел конечный. Тогда

$$x_0 = \lim x_i = \lim x(-t_i^*;x_i^*) = \lim x(-t^*;x_i^*) = x(-t^*;x_0^*);$$

здесь использована непрерывная зависимость $x(t;x_0)$ сначала по t, затем по x. Но поскольку $x_0 \notin M_{123}$ и $x_0 = x(-t^*;x_0^*)$, то $x_0^* \notin M_{123}^*$.

Пусть $\lim t_{i_k} = +\infty$ или $\lim t_{i_k} = -\infty$. Тогда x_0 является предельной точкой, к которой стремятся траектории $x(t;x_i)$. Но поскольку $x_i \in M_{123}$, то такой предельной точкой может быть только $x_0 = 0$.

Утверждение 5. *Функция γ непрерывна в $M \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_i\} \in M$,

$$\lim_{i\to\infty} \{x_i\} = x_0 \neq 0,$$

и покажем, что

$$\lim_{i\to\infty} \gamma(x_i) = \gamma(x_0). \tag{9}$$

1. Пусть $\gamma(x_0) \neq 0$. Тогда из (7) следует, что $x_0 \in M_{123}$ и $\exists\, x_0^*$. Поскольку M_{123} открыто, то $\exists\, N\colon \forall\, i > N\, x_i \in M_{123}$, и $\forall\, i > N \,\exists\, x_i^*$. Из непрерывности траектории $x(t;x_0)$ получаем, что $\exists \lim\limits_{i\to\infty} x_i^* = x_0^*$. Поскольку $\overline{\gamma}$ непрерывна, то

$$\lim_{i\to\infty} \overline{\gamma}(x_i^*) = \gamma(x_0^*),$$

что с учетом формулы (7) означает (9).

2. Пусть $\gamma(x_0) = 0$ и $\exists N\colon \forall i > N \ x_i \notin M_{123}$. Тогда $\gamma(x_i) = 0$ при $i > N$ и, следовательно, (9) выполнено.

3. Пусть $\gamma(x_0) = 0$ и $\forall N > 0 \ \exists i > N\colon x_i \in M_{123}$. Выделим из последовательности $\{x_i\}$ подпоследовательности $\{x_i^M\} \in M_{123}$ и $\{x_i^0\} \notin M_{123}$. Поскольку $\gamma(x_i^0) = 0$, то сходимость всей последовательности определяется сходимостью подпоследовательности $\gamma(\{x_i^M\})$. Согласно утверждению 4

$$\lim_{i\to\infty} \gamma(x_i^M) = 0,$$

а следовательно, (9) имеет место.

Утверждение 6. *Функция γ, определенная формулой* (7)*, существует для любой системы вида* (1) *в заданной области M в предположении, что в M выполнены условия существования и единственности решений.*

Доказательство. Существование и единственность решений в M означают существование разбиения (4). В таком случае функция γ будет определена в любой точке M, если определена функция $\overline{\gamma}$ на границе M.

Для того чтобы определить $\overline{\gamma}$, рассмотрим границу M^*. Это гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, следовательно, его можно рассматривать как риманово многообразие с метрикой $d(\cdot,\cdot)$. Пусть

$$\overline{\gamma}\colon M^* \to \mathbb{R}, \qquad \overline{\gamma}(x) = \min_{x' \in M_0^*} d(x, x'). \tag{10}$$

Множество M_0 замкнуто (утверждение 3), поэтому минимум всегда достигается. Естественная метрика d непрерывна на M^*, поэтому и $\overline{\gamma}(x)$ является непрерывной функцией.

Отметим, что (10) является лишь одним из возможных способов построить $\overline{\gamma}$, однако он применим для произвольной системы с указанными свойствами и позволяет доказать существование $\overline{\gamma}$.

Доказательство основной теоремы. Выберем области (2) и (3) таким образом, чтобы условия существования и единственности решений (1) выполнялись в M^ε. Это заведомо можно сделать за счет выбора числа r. Разобьем область M на M_i, $i = \overline{0,3}$. Построим функцию V_0 в виде (5); согласно [4], это возможно. Воспользовавшись утверждением (6), построим функцию γ в области M.

Запишем функцию V в виде (5). Докажем, что она непрерывна вместе со своей производной на M.

Поскольку $\gamma(x) \geqslant 0$ и $\dot{\gamma}(x) = 0$ при $x \in M$ по построению, то $\dot{V}(x) \geqslant 0$, и остается показать, что функция $V(x) = \gamma(x)V_0(x)$ является непрерывной в M.

Функция V_0 ограничена на M и непрерывна на M_{123}; кроме того, $V_0(0) = 0$. Функция $\gamma(x)$ ограничена на M, непрерывна на $M \setminus \{0\}$, и $\gamma(x) = 0$ при $x \in M_0$. Следовательно, согласно 1, $V(x)$ непрерывна на M.

Производная в силу системы (1)

$$\dot{V}(x) = \gamma(x)\dot{V}_0(x) + \dot{\gamma}(x)V_0(x) = \gamma(x)\dot{V}_0(x), \tag{11}$$

поскольку $\gamma(x)$ постоянна вдоль траекторий системы (1), а следовательно, $\dot{\gamma}(x) = 0$. Функция $\dot{V}_0(x)$ также непрерывна на M_{123}, $\dot{V}_0(0) = 0$, поэтому согласно утверждению 1 $\dot{V}(x)$ непрерывна на M.

Поскольку $\gamma(x) \geqslant 0$ и $\dot{V}(x) \geqslant 0$, то из (11) следует $\dot{V}(x) \geqslant 0$. Таким образом, теорема доказана.

1. *Ковалев А. М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
2. *Ковалев А. М., Суйков А. С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 22–27.
3. *Ковалев А. М.* Решение задач устойчивости для нелийненых систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 32. – С. 3–28.
4. *Красовский Н. Н.* Об обращении теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 5. – С. 513–532.
5. *Massera J. L.* On Liapounoff's conditions of stability // Ann. Math. Second Series. – 1949. – **50**, No 3. – P. 705–721.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 26.01.2012

Академік НАН України **О. М. Ковальов, В. М. Неспірний, О. С. Суйков**

Існування функцій зі знакосталою похідною для автономних систем диференціальних рівнянь

Для автономної системи диференціальних рівнянь, що задовольняє умови існування та єдиності розв'язків в околі стаціонарної точки, доведено існування функції, похідна якої внаслідок системи є знакосталою. При доведенні використані результати М. М. Красовського та Х. Л. Массери.

Academician of the NAS of Ukraine **A. M. Kovalev, V. N. Nespirnyy, A. S. Suykov**

Existence of a function with constant-sign derivative for autonomous systems of differential equations

For an autonomous system of differential equations satisfying the conditions of existence and uniqueness of solutions in a vicinity of the stationary point, the existence of a function with constant-sign derivative along trajectories of the system is proven. In the proof, Krasovskii's and Massera's results are used.