Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2012

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 531.37:531.396:537.634:537.612.4:519.6

С. С. Зуб, член-корреспондент НАН Украины **С. И. Ляшко,**
В. С. Ляшко

Об устойчивости орбитального движения двух магнитных тел

Проведен сравнительный анализ современных методов исследования динамики магнитно взаимодействующих тел и представлены новые результаты по исследованию динамики в модели магнитных гантелей. Рассматриваются различные аспекты применения новых теоретико-групповых методов к исследованию устойчивости орбитального движения двух магнитных тел. Обсуждается предложенная авторами методика исследования устойчивости магнитных систем, включающая в себя: численное моделирование гамильтоновых уравнений движения, метод Монте-Карло заполнения фазового объема, процедуры статистической обработки данных, полученных в результате численного эксперимента.

Данная работа посвящена анализу орбитальных движений в системах магнитно взаимодействующих тел, предложеных в работах [1–5]. В этих работах для исследования траекторий нами применялись как аналитические методы, так и методы физической кибернетики [6].

Существует два исторических аспекта рассматриваемой проблемы. Первый связан с нахождением потенциальной энергии взаимодействия, приводящей к замкнутым орбитам при любых начальных условиях в задаче двух тел. Эта задача была поставлена еще Ньютоном и решена Бертраном, Дарбу и Альфеном во второй половине XIX века. Однако уже в первой половине XX века в другой постановке эта задача возникла в ядерной физике как "проблема $-1/r^3$" [7]. Различный вклад в ее решение внесли Гейзенберг, Тамм, Гинзбург и Козорез [8]. Если снять некоторые ограничения, например требование замкнутости, произвольности начальных условий, то можно говорить об устойчивых квазипериодических[1] движениях в смысле ограниченности траектории объемом некоторого тора с заданным поперечным сечением.

Гейзенбергу принадлежит идея об учете пространственной протяженности частицы или "учете реакции собственного поля частицы" [8]. Связанная с этим идея "тесных" магнитных конфигураций привела к появлению модели взаимодействия двух "магнитных ганте-

[1] "Период" — время между двумя последовательными пересечениями плоскости, поперечной движению, например, плоскость xz.

лей", которая, пожалуй, является наиболее простой магнитной конфигурацией с магнитной потенциальной энергией, не подчиняющейся закону обратных кубов. По всей видимости, первым в такой постановке эту задачу рассмотрел В. В. Козорез.

Сформулированные им условия устойчивости орбитального движения, как мы сегодня знаем [4], нельзя признать достаточными, но именно его пионерские работы дали толчок для более глубокого и всестороннего исследования "тесных" магнитных конфигураций.

Второй аспект относится к разработке математического аппарата исследования динамики гамильтоновых систем.

Над созданием теоретических основ гамильтонового формализма для твердого тела работали как физики, так и математики. Среди них такие известные имена, как Вольфганг Паули [9] и Софус Ли, а также Б. Констант, Дж.-М. Сурьо, А. А. Кириллов, В. И. Арнольд, Дж. Е. Марсден [10]. Различные подходы к гамильтоновой динамике твердого тел в рамках пуассоновых структур (ПС) для широкого круга задач разрабатываются, например, в работах А. В. Борисова и И. С. Мамаева [11].

Новая постановка задачи — о возможности орбитальных движений в "тесных" магнитных системах — потребовала нового математического аппарата.

В работе [3] приводится обзор существующих вариантов гамильтонового формализма, обсуждаются причины, по которым они не применимы для описания динамики магнитно взаимодействующих твердых тел.

Основой для получения гамильтонового формализма магнитно взаимодействующих тел для достаточно широкого класса систем, включающих как постоянные магниты, так и сверхпроводящие элементы, послужила работа [12].

Предложенный нами гамильтонов формализм [2, 3] на основе пуассоновых структур позволил дать алгебраическое бескоординатное описание динамики магнитно взаимодействующих осесимметричных твердых тел, а также применить новые теоретико-групповые методы к исследованию устойчивости в рассматриваемой задаче и значительно упростил как процесс создания математической модели, так и ее численное исследование [5].

Исследованию устойчивости в динамических системах посвящен ряд современных работ [5, 13, 14]. Используемые в них методы можно формально разделить на три класса, а именно, аналитические, качественные и численный эксперимент.

Аналитические методы дают необходимые и достаточные условия устойчивости для реализуемых орбит в явном виде. Качественные методы, как правило, дают ответы на такие вопросы как количество положений равновесия, существование устойчивых решений и периодических траекторий и т. д. Большинство качественных методов, относящихся к анализу устойчивости динамических систем, является развитием метода Ляпунова.

Численный эксперимент не является альтернативой аналитическим и качественным методам, но позволяет проводить поисковые исследования, когда применение указанных методов представляют трудность, а также дает возможность извлекать дополнительную информацию о системе, если даже имеется информация аналитического и качественного характера. С философской точки зрения никакой эксперимент — ни численный, ни реальный — не может доказать устойчивость. Он может только дать определенные доводы в пользу устойчивости. На практике же мы наблюдаем комбинирование этих методов исследования. Рассматриваемая нами система является гамильтоновой, т. е. понятие асимптотической устойчивости к ней не применимо. Следовательно, ряд качественных методов [13], которые успешно применяются для исследования задач нелинейной динамики, не могут быть напрямую использованы для исследования магнитно взаимодействующих тел. Основная масса аналитических результатов по устойчивости гамильтоновых систем относится к случаю симплектических многообразий, но есть работа [15], относящаяся к более сложному для анализа случаю пуассоновых структур. Именно теорема из этой работы используется в нашей статье [4] для доказательства устойчивости орбитального движения. Отметим, что в силу теоретико-групповых свойств, теорема требует доказать выполнение необходимых и достаточных условий только в одной точке орбиты.

В нашем случае пуассоновым многообразием является прямое произведение евклидовых пространств:

$$P = R^3_x \times R^3_p \times R^3_\mu \times R^3_m \times R^3_\nu \times R^3_n. \tag{1}$$

Таким образом, образующими нашей динамической системы будут: x_i — относительные координаты двух тел; p_i — компоненты импульса относительного (орбитального движения); m_i — компоненты моментов импульса 1-го и n_i — 2-го тела; μ_i и ν_i — компоненты направляющих ортов осей симметрии 1-го и 2-го тел соответственно.

Ненулевые скобки Пуассона между образующими на P имеют вид:

$$\begin{cases} \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}; \\ \{m_i, \mu_j\} = \varepsilon_{ijk}\mu_k; \quad \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk}m_k; \\ \{n_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijk}\nu_k; \quad \{n_i, n_j\} = \varepsilon_{ijk}n_k, \end{cases} \tag{2}$$

а остальные определяющие скобки Пуассона равны 0.

Функциями Казимира данной пуассоновой структуры, как легко проверить, будут $\vec{\mu}^2 = 1$, $\vec{\nu}^2 = 1$, $(\vec{\mu}, \vec{m}) = M_3 = \mathrm{const}_1$, $(\vec{\nu}, \vec{n}) = N_3 = \mathrm{const}_2$.

Ограничение рассмотрением симметричных волчков позволяет использовать единую декартову систему отсчета, причем компоненты векторных физических величин становятся удобными образующими для пуассоновой структуры.

Гамильтониан системы имеет вид:

$$h = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{\alpha}{2}\vec{m}'^2 + \frac{\beta}{2}\vec{m}''^2 + U(r, c', c'', c'''), \tag{3}$$

где $\vec{r}$ $(r = |\vec{r}|$, $\vec{e} = \vec{r}/r)$; $\vec{p}$ — орбитальные кординаты и импульсы; $\vec{\nu}'$, $\vec{m}'$ — ось симметрии и момент импульса 1-го тела, $\vec{\nu}''$, $\vec{m}''$ — 2-го, соответственно; $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса двух тел; $\alpha = \beta = 1/I_\perp$ $(I_1 = I_2 = I_\perp$ — главные моменты инерции тел); $c' = (\vec{e}, \vec{\nu}')$, $c'' = (\vec{e}, \vec{\nu}'')$, $c''' = (\vec{\nu}', \vec{\nu}'')$.

В этом случае уравнения движения записывается в векторном виде [3]:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \dfrac{1}{m}\vec{p}; \\ \dot{\vec{p}} = -\partial_r U\vec{e} - \dfrac{1}{r}(\partial_{c'} U P^e_\perp(\vec{\nu}') + \partial_{c''} U P^e_\perp(\vec{\nu}'')); \\ \dot{\vec{\nu}}' = \alpha'(\vec{m}' \times \vec{\nu}'); \\ \dot{\vec{m}}' = \partial_{c'} U(\vec{e} \times \vec{\nu}') - \partial_{c'''} U(\vec{\nu}' \times \vec{\nu}''); \\ \dot{\vec{\nu}}'' = \alpha''(\vec{m}'' \times \vec{\nu}''); \\ \dot{\vec{m}}'' = \partial_{c''} U(\vec{e} \times \vec{\nu}'') + \partial_{c'''} U(\vec{\nu}' \times \vec{\nu}''), \end{cases} \tag{4}$$

где $P^e_\perp(\vec{\nu}') = (\vec{\nu}' - c'\vec{e})$ — проектор на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{e}$.

Особую роль в вопросах устойчивости орбитальных движений играют так называемые “относительные равновесия” [10], т. е. такие траектории динамики системы, которые одновременно являются однопараметрическими подгруппами группы инвариантности системы.

Устойчивость формулируется относительно некоторой подгруппы G' (в нашем случае это подгруппа вращений вокруг заданной оси) [15, с. 176]. Для этого вводят “трубчатую” окрестность устойчивой орбиты, т. е. такую, что она вся состоит из орбит подгруппы G'. Тогда траектория системы, начинающаяся в некоторой окрестности точки устойчивой орбиты, не должна покидать данную трубчатую окрестность.

Для доказательства устойчивости орбитального движения в задаче двух цилиндрических магнитов [1–4] была использована теорема 4.8 работы [15]. Данная теорема включает условия топологического, алгебраического и аналитического характера. Чтобы сформулировать аналитические условия, вводится набор интегралов движения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и конструируется некоторая целевая функция из гамильтониана и интегралов движения, включая компоненту момента. Затем мы должны установить положительную (или отрицательную) определенность целевой функции относительно вариаций переменных из некоторого подпространства.

Специфика применения современных теоретико-групповых методов к исследованию нашей системы состоит в том, что они являются далеко идущими обобщениями теории углового момента, тогда как в нашем случае именно угловой момент и является отображением момента.

Таким образом, в нашем случае те усложнения и тонкости, которые необходимы для перехода от простой модели ко все более общим и сложным, необходимо “спустить вниз” к исходной простой модели действия группы вращения и связанной с этим действием теории углового момента.

При описании цилиндрических магнитов использовалась модель магнитных гантелей [2].

Вводим некоторую декартову систему координат (д. с. к.), связанную с центром масс системы гантелей. В начальный момент времени гантели параллельны друг другу и оси z д. с. к.. Рассмотрим подгруппу вращений вокруг этой оси. Каждая однопараметрическая подгруппа этой группы будет характеризоваться своей угловой скоростью вращения $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$. Скорость изменения любой физической величины $\vec{v}$ нашей задачи вдоль орбиты данной подгруппы будет задаваться формулой $\dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Тогда для относительного равновесия в фиксированной точке на орбите должны выполняться соотношения:

$$\vec{x}_0 = r_0\vec{e}_1; \qquad \vec{\mu} = \vec{e}_3; \qquad \vec{\nu} = -\vec{e}_3; \qquad \vec{p}_0 = p_0\vec{e}_2; \qquad \vec{m} = m\vec{e}_3; \qquad \vec{n} = n\vec{e}_3, \tag{5}$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — фиксированный базис.

Таким образом, движение тел происходит по окружности в плоскости xy, оси магнитов параллельны оси z и противоположны по направлению, и все моменты параллельны оси z. Это согласуется с уравнениями движения (4) при данных начальных условиях, а условия (5) сводятся к равенству центростремительной и центробежной силы.

Все условия теоремы, связанные с действиями групп и алгебр Ли на пуассоновом многообразии, выполняются для нашей динамической системы [4].

Получено 10 независимых условий на параметры системы, которые позволяют определить области орбитальной устойчивости в пространстве параметров системы. Найдены точки, в которых условия теоремы выполняются, т. е. множество соответствующих параметров является непустым.

Проведен численный эксперимент по моделированию квазипериодического движения двух тонких и длинных магнитно взаимодействующих цилиндрических тел. Изложена методика исследования устойчивости магнитной системы, включающая в себя: численное моделирование гамильтоновых уравнений движения, метод Монте-Карло (ММК) заполнения фазового объема, процедуры статистической обработки данных, полученных в результате численного эксперимента. Результаты численного эксперимента свидетельствуют об устойчивом характере найденных квазипериодических движений.

Исследуемый вид U-потенциальной энергии взаимодействия (3) описывает достаточно широкий класс парных взаимодействий магнитных тел [12]. Такие системы представляют интерес для физических и технических приложений.

Предложенный вариант гамильтонового формализма удобен как для численного моделирования, так и для исследования устойчивости динамики таких систем.

Найдены относительные равновесия и соответствующие им параметры модели, т. е. аналитически доказано существование устойчивости.

Аналитическое доказательство устойчивости обладает бесспорным преимуществом в силу своей строгости и является, по сути, единственным способом установления устойчивости определенных видов траекторий. Возникающие в виде необходимых и достаточных условий функциональные связи между параметрами системы позволяют определить зоны устойчивости. Однако аналитический подход для сложных систем в силу громоздкости возникающих выражений приводит к невозможности провести анализ до конца аналитическими методами и также требует привлечения численных методов. Кроме того, подход, основанный на свойствах симметрии в гамильтоновых системах, имеет свои ограничения:

1) исследуется устойчивость узкого класса траекторий, а именно, так называемые относительные равновесия;

2) устойчивость понимается в смысле малых (в пределе бесконечно малых) отклонений от относительного равновесия;

3) не дается информация о запасе устойчивости.

Последние исследования [5] показывают, что кроме относительных равновесий имеются также другие устойчивые квазипериодические траектории.

Предложенная нами методика использует комбинацию аналитического подхода и численного эксперимента, основанного на методе Монте-Карло, модели линейной регрессии и позволяет нам исследовать стационарность любых траекторий. Такой подход дает дополнительную информацию о характере устойчивых орбит, например, о запасе устойчивости, об изменении периода орбит.

1. *Григор'єва Л. В., Козоріз В. В., Козоріз О. В., Ляшко С. І.* Про динамічну задачу двох вільних циліндричних магнітів та її Maple-моделювання // Доп. НАН України. – 2007. – № 11. – С. 41–47.
2. *Zub S.* Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies // PoS(ACAT08)116. – 2009. – 5 p.
3. *Зуб С. С.* Гамильтонов формализм для магнитного взаимодействия свободных тел // Журн. вычисл. и прикл. математики. – 2010. – Вып. 3(102). – С. 49–62.
4. *Зуб С. С.* Дослідження стійкості орбітального руху в системі двох магнітно взаємодіючих тіл // Вісн. Київ. нац. ун-ту. ім. Тараса Шевченка. – 2011. – Вип. 2. – С. 176–184.
5. *Зуб С. С., Ляшко С. И., Ляшко С. В.* Исследование устойчивости орбитального движения магнитно взаимодействующих тел методом численного эксперимента // Журн. вычисл. и прикл. математики. – 2012. – Вып. 1(108). – С. 39–54.
6. *Самойленко Ю. И.* Проблемы и методы физической кибернетики. – Киев: Изд. Ин-та математики НАН Украины, 2006. – 644 с.
7. *Козорез В. В.* Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. – Киев: Наук. думка, 1981. – 140 с.

8. *Marsden J. E.* Lectures on mechanics. – London: Cambridge Univ. Press, 1992. – 254 p.
9. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* Poisson structure and Lie algebras in Hamiltonian mechanics. – Izhevsk: Udmurt Univ., 1999. – 470 p.
10. *Zub S. S.* Contact-free static stable equilibrium in the ground and space systems // Proceedings of "Int. Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drivers (MAGLEV'2002)". – September 3–5, 2002. – Lausanne, Switzerland. – 2002. – PP02105.
11. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике: Пер. с англ. – Москва; Ижевск: Изд. Ин-та комп. исследований, 2003. – 221 с.
12. *Skokos Ch.* Alignment indices: a new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits // J. Phys. A: Math. and Theor. – 2001. – **34**. – P. 129–143.
13. *Ortega J-P., Ratiu T. S.* Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry // J. Geom. Phys. – 1999. – **32**. – P. 160–188.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 12.03.2012

С. С. Зуб, член-кореспондент НАН України **С. І. Ляшко, В. С. Ляшко**

Про стійкість орбітального руху двох магнітних тіл

Проведено порівняльний аналіз сучасних методів дослідження динаміки магнітно взаємодіючих тіл та наведено нові результати з дослідження динаміки в моделі магнітних гантелей. Розглядаються різні аспекти застосування нових теоретико-групових методів щодо дослідження стійкості орбітального руху двох магнітних тіл. Обговорюється запропонована авторами методика дослідження стійкості магнітних систем, що включає: чисельне моделювання гамільтонових рівнянь руху, метод Монте-Карло заповнення фазового об'єму, процедури статистичної обробки даних, отриманих в результаті чисельного експерименту.

S. S. Zub, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **S. I. Lyashko,**
V. S. Lyashko

About the orbital motion stability of two magnetic bodies

The comparative analysis of modern research methods for the dynamics of magnetically interacting bodies is executed. The new results of studies of the interaction of magnetic dumbbells are presented. The various aspects of the application of the group-theoretic methods to the research of the stability of the orbital motion of two magnetic bodies are considered. The procedure of magnetic systems offered by the authors includes the numerical modeling of the Hamilton motion equations, Monte Carlo method for the filling of the phase-space volume, and the processing of statistical data obtained in computational experiments.