Доповіді Національної академії наук України

10 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний

Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Розглянуто відому проблему про добуток внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині. Для деяких часткових випадків дана проблема була розв'язана.

Серед напрямків розвитку геометричної теорії функцій комплексної змінної важливе місце займає розв'язування екстремальних задач на класах областей, що не перетинаються. Першим важливим результатом даної тематики була теорема Лаврентьєва [1]. Значний внесок у розвиток цього напрямку зроблено багатьма дослідниками (див., наприклад, [1–9]). Зокрема, в роботі [5] було сформульовано таку екстремальну задачу:

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

де B_0, B_1, B_2, $\ldots$, B_n $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$ і $0 < \gamma \leqslant n$ (див., наприклад, [5, 6]), досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію.

Ми розв'язуватимемо дану задачу при $n = 2$ і $\gamma \in (0; 1{,}4]$.

Варто зауважити, що випадок $n = 2$ є одним з найскладніших у даній проблемі. Так, у роботі [6] знайдено розв'язок задачі 1 при $\gamma = 1$ і довільному n. У роботі [7], отримано розв'язок проблеми для $n \geqslant 5$ і $\alpha_0 < 2/\sqrt{\gamma}$ (чому дорівнює α_0, буде вказано пізніше). Г. В. Кузьміною [8] розв'язано задачу Дубініна для $\forall\, n$ і $0 < \gamma < 1$. В роботі [10] доведено правильність твердження задачі 1 для $n = 2$ і $\gamma \in (0; 1.1]$ при додатковій умові, що $r(B_0, a_0) \leqslant 1$. В [11] цю умову було знято.

У даній роботі встановлено такий результат:

Теорема 1. *Для $n = 2$ і $\gamma \in (0; 1{,}4]$ виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k) \leqslant r^\gamma(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^{2} r(D_k, a_k^0),$$

де B_0, B_1, B_2 — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,2}$, де a_k^0, D_k, — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2} dw^2. \qquad (2)$$

Доведення. Оскільки в роботі [11] було доведено дану теорему для $\gamma \in (0; 1{,}1]$, то нам залишається розглянути випадок $\gamma \in (1{,}1; 1{,}4]$.

Встановимо спочатку, що твердження теореми правильне для $\gamma = 1{,}4$. Метод доведення спирається на застосування, аналогічне теоремі 5.2.3 роботи [9], методу розділяючого перетворення областей, який детально розроблений в роботах [5, 6]. Опис розділяючого перетворення областей для даного випадку проведений в [11], тут лише запишемо потрібні нам висновки.

Отже, нехай $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,2}$, та $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < 2\pi$.

Означимо числа α_k таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \qquad \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_2).$$

Як і в теоремі 5.2.3 [9], за допомогою розділяючого перетворення отримаємо нерівність

$$I_2(\gamma) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{2} \alpha_k r^{\gamma\alpha_k^2}(D_0, 0) r(D_1, i) r(D_2, -i)\right]^{1/2}, \qquad (3)$$

де D_k, $k = \overline{0,2}$, — згадані вище кругові області квадратичного диференціала (2). Дана нерівність правильна для $0 < \gamma \leqslant 1$ на основі результатів роботи [6]. При $\gamma > 1$ її застосування, взагалі кажучи, некоректне. Встановимо умови її правильності для $\gamma = 1{,}4$.

Для доведення цього твердження припустимо, що $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma}$, де $\alpha_0 := \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Згідно з теоремою 5.2.3 роботи [9]

$$I_2^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, a_0) \prod_{k=1}^{2} r(D_k, a_k) = \frac{4\gamma^{\gamma/2}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{4}\right)^{2+\gamma/2}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Легко побачити, що $I_2^0(1,4) \approx 0{,}647887$.

Позначимо $r(B_0, 0) = p$ і $I_2^0(\gamma) = q$. Тоді, згідно з лемою 1 роботи [12], отримаємо нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k) \leqslant I_2^0(\gamma)$$

при умові

$$r(B_0, 0) \geqslant q^{1/(\gamma-n)} \approx 2{,}061464.$$

Залишилося розглянути випадок $p < 2{,}061464 =: p_0$.

Виконаємо такі перетворення:

$$I_2(\gamma) = p^{\gamma-1} \prod_{k=0}^{2} r(B_k, a_k) \leqslant p_0^{\gamma-1} \prod_{k=0}^{2} r(B_k, a_k). \tag{4}$$

Із співвідношення (4) за допомогою нерівності Голузіна [2, с. 162] отримаємо, що

$$I_2(\gamma) \leqslant \frac{128}{81\sqrt{3}} p_0^{\gamma-1} \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right). \tag{5}$$

Врахувавши в (5), що $p_0 = 2{,}061464$ і $\gamma = 1{,}4$, отримаємо $I_2(\gamma) \leqslant 0{,}569698 < I_2^0(\gamma)$. Таким чином, встановлено, що для $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma}$ виконується нерівність $I_2(\gamma) < I_2^0(\gamma)$.

Залишається розглянути випадок $\alpha_0 < 2/\sqrt{\gamma}$, для якого нерівність (3) виконується.

Використовуючи метод роботи [11], встановлюємо, що екстремальною буде конфігурація областей D_0, D_1, D_2 і точок a_0^0, a_1^0, a_2^0.

Для $\gamma = 1{,}4$ теорему доведено. Функціонал $I_2^0(\gamma)$ як функція від γ монотонно спадає на проміжку $[1{,}1; 1{,}4]$. Водночас функція $\dfrac{128}{81\sqrt{3}} p_0^{\gamma-1} \sin \pi \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$ є монотонно зростаючою на цьому ж проміжку. А отже, для $\gamma \in [1{,}1; 1{,}4]$ і $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma}$

$$\frac{I_2(\gamma)}{I_2^0(\gamma)} \leqslant \frac{I_2(1{,}4)}{I_2^0(1{,}4)} < 1.$$

Для $\gamma \in (1{,}1; 1{,}4]$ і $\alpha_0 < 2/\sqrt{\gamma}$ міркування аналогічні наведеним в роботі [11] для випадку $\gamma = 1{,}1$. Звідси для $\gamma \in [1{,}1; 1{,}4]$ $I_2(\gamma) \leqslant I_2^0(\gamma)$, а тому $I_2^0(\gamma)$ — екстремальне значення функції $I_2(\gamma)$.

Теорему доведено.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж.* А. Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
6. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
7. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. – 1996. – **2**. – С. 96–98.
8. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 2003. – **302**. – С. 52–67.

9. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2008. – Т. 73. – 308 с.
10. *Бахтін О. К., Заболотний Я. В.* Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 327–331.
11. *Заболотний Я. В.* Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області // Доп. НАН України. – 2011. – № 4. – С. 20–24.
12. *Заболотний Я. В.* Про одну екстремальну задачу В. М. Дубініна // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 1. – С. 24–31.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 05.04.2013

О. К. Бахтин, Я. В. Заболотный

Оценки произведения внутренних радиусов трех неналегающих областей

Рассмотрена известная проблема о произведении внутренних радиусов неналегающих областей на комплексной плоскости. Для некоторых частных случаев данная проблема была решена.

O. K. Bakhtin, Ja. V. Zabolotnij

Estimates of the product of the inner radii of three nonoverlapping domains

The well-known problem of a product of the inner radii of nonoverlapping domains on the complex plane is considered and solved in some partial cases.