УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

Обобщенно разрешимые AFF-группы

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Изучен $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — ассоциативное кольцо, $C_G(A) = 1$, и любая собственная подгруппа H группы G, для которой $\mathbf{R}$-модуль $A/C_A(H)$ бесконечен, конечно порождена. Группа G, удовлетворяющая заданным условиям, называется AFF*-группой. Доказано, что локально разрешимая* AFF*-группа гиперабелева. Описана структура* AFF*-группы G в случае, когда G — конечно порожденная разрешимая группа и $\mathbf{R}$-модуль $A/C_A(G)$ бесконечен.*

Изучение модулей с различными условиями конечности является важным направлением в современной алгебре. Б. А. Ф. Верфриц ввел в рассмотрение конечно-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$. Группа автоморфизмов $F\operatorname{Aut}_{\mathfrak{F}} M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется конечно-финитарной, если $A(g-1)$ является конечным $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g \in F\operatorname{Aut}_{\mathfrak{F}} M$ [1]. В настоящей работе рассматривается антипод конечно-финитарной группы автоморфизмов $F\operatorname{Aut}_{\mathfrak{F}} M$.

Определение 1. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Будем говорить, что группа G является AFF-группой, если любая собственная подгруппа H группы G, для которой $\mathbf{R}$-модуль $A/C_A(H)$ бесконечен, конечно порождена.

При изучении данного класса групп важную роль играет понятие коцентрализатора подгруппы H в модуле A, введенное в [2].

Определение 2 [2]. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактормодуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

С учетом определения 2 понятие AFF-группы можно переформулировать следующим образом. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Группа G называется AFF-группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A бесконечен, конечно порождена. Отметим, что автором исследовались локально разрешимые группы с аналогичными ограничениями на подгруппы, в определениях которых условие конечности коцентрализатора заменено условием артиновости, нетеровости или минимаксности. Это AFA-, AFN- и AFM-группы [3–5].

В настоящей работе изучаются обобщенно разрешимые AFF-группы и обобщается ряд результатов, полученных в [6]. Всюду рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — произвольное ассоциативное кольцо и $C_G(A) = 1$.

Лемма 1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль.*

1. Если $L \leqslant H \leqslant G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A конечен, то и коцентрализатор подгруппы L в модуле A конечен.

2. Если L, $H \leqslant G$ и коцентрализаторы подгрупп L и H в модуле A конечны, то коцентрализатор подгруппы $\langle L, H\rangle$ в модуле A также конечен.

Следствие 1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль. Множество $FFD(G)$ всех элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x\rangle$ в модуле A конечен, является нормальной подгруппой группы G.*

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что $FFD(G)$ является подгруппой группы G. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех x, $g \in G$, то подгруппа $FFD(G)$ нормальна в G. Следствие доказано.

Лемма 2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — разрешимая* AFF*-группа, не являющаяся квазициклической p-группой для некоторого простого числа p. Тогда $G/FFD(G)$ — полициклическая группа.*

Лемма 3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа. Если коцентрализатор группы G в модуле A конечен, то группа G почти абелева.*

Доказательство. Так как коцентрализатор группы G в модуле A конечен, то фактор-модуль $A/C_A(G)$ конечен. Пусть $C = C_A(G)$. Модуль A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей $0 \leqslant C \leqslant A$ такой, что фактор A/C конечен. Следовательно, факторгруппа $G/C_G(A/C)$ конечна. Из выбора C вытекает, что факторгруппа $G/C_G(C)$ тривиальна. Пусть $H = C_G(C) \cap$ $\cap\, C_G(A/C)$. Подгруппа H действует тривиально в каждом факторе ряда $0 \leqslant C \leqslant A$. По теореме Калужнина [7, с. 144] подгруппа H абелева. По теореме Ремака $G/H \hookrightarrow G/C_G(C) \times$ $\times\, G/C_G(A/C)$. Отсюда вытекает, что факторгруппа G/H конечна, а группа G почти абелева. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечно порожденная разрешимая* AFF*-группа. Тогда коцентрализатор подгруппы $FFD(G)$ в модуле A конечен.*

Доказательство. Пусть $D = FFD(G)$ и пусть $\langle 1 \rangle = D_0 \leqslant D_1 \leqslant \cdots \leqslant D_n = D$ — производный ряд подгруппы D. Если каждый фактор D_{j+1}/D_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, конечно порожден, то подгруппа D полициклическая, и поэтому D конечно порождена. По лемме 1 коцентрализатор подгруппы D в модуле A конечен. Пусть теперь для некотрого $j = 0, 1, \ldots, n-1$, фактор D_{j+1}/D_j бесконечно порожден и пусть t — такое число, что D_t/D_{t-1} бесконечно порожден, а факторы D_{j+1}/D_j конечно порождены для каждого $j \geqslant t$. Отсюда вытекает, что факторгруппа D/D_t — полициклическая. Поскольку группа G конечно порождена, бесконечно порожденная подгруппа D_t является собственной подгруппой G, и поэтому коцентрализатор D_t в модуле A конечен. Так как факторгруппа D/D_t полициклическая, то $D = KD_t$ для некоторой конечно порожденной подгруппы K. Из включения $K \leqslant FFD(G)$ следует, что коцентрализатор подгруппы K в модуле A конечен. По лемме 1 коцентрализатор подгруппы $FFD(G)$ в модуле A конечен. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — бесконечная разрешимая группа. Если коцентрализатор группы G в модуле A бесконечен, а коцентрализатор каждой собственной подгруппы группы G в модуле A конечен, то G изоморфна квазициклической q-группе для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Докажем сначала, что G — бесконечно порожденная группа. Предположим противное. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — минимальная система порождающих группы G. Если $m = 1$, тогда G — бесконечная циклическая группа. Следовательно, G порождается двумя собственными подгруппами. По лемме 1 коцентрализатор группы G в модуле A конечен. Противоречие. Если $k > 1$, то группа G порождается двумя собственными подгруппами $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{m-1} \rangle$ и $\langle x_m \rangle$. Снова получаем противоречие. Отсюда вытекает, что G — бесконечно порожденная группа.

Покажем, что группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса. Предположим противное. Пусть N — собственная подгруппа группы G и индекс $|G : N|$ конечен. Тогда можно выбрать конечно порожденную подгруппу M так, чтобы выполнялось равенство $G = MN$. Поскольку M и N — собственные подгруппы группы G, их коцентрализаторы в модуле A конечны. Отсюда с учетом леммы 1 получаем, что коцентрализатор группы G

в модуле A конечен. Противоречие. Следовательно, группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса.

Пусть D — коммутант группы G. Поскольку группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, факторгруппа G/D бесконечна. Из леммы 1 вытекает, что абелева факторгруппа G/D не может порождаться двумя собственными подгруппами. Пусть факторгруппа G/D не является периодической и пусть T/D — периодическая часть G/D. Тогда факторгруппа G/T порождается двумя собственными подгруппами. С учетом леммы 1 получаем противоречие. Следовательно, факторгруппа G/D периодическая, и поэтому G/D является квазициклической q-группой для некоторого простого числа q [7, с. 152]. Пусть H/D — произвольная нетривиальная конечная подгруппа G/D. Так как H — собственная подгруппа группы G, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A конечен. Следовательно, $\mathbf{R}$-модуль $A/C_A(H)$ конечен, и поэтому факторгруппа $G/C_G(A/C_A(H))$ конечна. Так как группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, то $G = C_G(A/C_A(H))$. Следовательно, $[G, A] \leqslant C_A(H)$. Из выбора H вытекает, что $[G, A] \leqslant C_A(G)$, и поэтому G действует тривиально в каждом факторе ряда $0 \leqslant C_A(G) \leqslant A$. По теореме Калужнина [8, с. 144] группа G абелева. Поэтому группа G изоморфна квазициклической q-группе для некоторого простого числа q. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая* AFF*-группа. Тогда группа G гиперабелева.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда группа G не является разрешимой. Тогда G не является простой группой (следствие 1 к теореме 5.27 [9]). Следовательно, G содержит собственную нормальную нетривиальную подгруппу H_1. Если подгруппа H_1 конечно порождена, то она разрешима. Если H_1 бесконечно порождена, то ее коцентрализатор в модуле A конечен и по лемме 3 подгруппа H_1 разрешима. Пусть d_1 — ступень разрешимости подгруппы H_1 и пусть W_1 — максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G ступени разрешимости d_1. Так как группа G не является разрешимой, то факторгруппа G/W_1 также не является разрешимой. Как и ранее, G/W_1 содержит собственную нормальную нетривиальную подгруппу H_2/W_1. Тогда H_2 — разрешимая подгруппа ступени разрешимости d_2, причем $d_2 > d_1$. Пусть W_2 — максимальная нормальная разрешимая подгруппа ступени разрешимости d_2, содержащая подгруппу W_1. Продолжив рассуждения аналогичным образом, построим возрастающий ряд нормальных подгрупп группы G

$$\langle 1\rangle = W_0 \leqslant W_1 \leqslant \cdots \leqslant W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant \cdots \tag{1}$$

такой, что: 1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ подгруппа W_n разрешима и имеет ступень разрешимости d_n; 2) $d_n < d_{n+1}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $W = \cup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Рассмотрим сначала случай, когда $G = W$. Тогда можно построить ряд $\langle 1\rangle = L_0 \leqslant L_1 \leqslant \cdots \leqslant L_n \leqslant L_{n+1} \leqslant \cdots$ нормальных подгрупп группы G, являющийся уплотнением ряда (1), такой, что $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, и каждый фактор L_{i+1}/L_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, абелев. Следовательно, группа G гиперабелева. Пусть теперь $G \neq W$. По построению подгруппа W не является разрешимой. Следовательно, W бесконечно порождена. Поэтому коцентрализатор подгруппы W в модуле A конечен. По лемме 3 подгруппа W разрешима. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечно порожденная разрешимая* AFF*-группа. Если коцентрализатор группы G в модуле A бесконечен, справедливы следующие утверждения: 1) коцентрализатор подгруппы $FFD(G)$ в модуле A конечен; 2) группа G содержит нормальную абелеву подгруппу U такую, что $U \leqslant FFD(G)$ и факторгруппа G/U полициклическая.*

Доказательство. Справедливость утверждения (1) следует из леммы 4. Докажем утверждение (2). Пусть $C = C_A(FFD(G))$. Так как фактормодуль A/C конечен, A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей $0 \leqslant C \leqslant A$ такой, что фактор A/C конечен. Следовательно, факторгруппа $G/C_G(A/C)$ конечна. Из выбора C вытекает, что $C_G(C) \geqslant FFD(G)$. По лемме 2 факторгруппа $G/C_G(C)$ является полициклической.

Пусть $W = C_G(C) \bigcap C_G(A/C)$. Подгруппа W действует тривиально в каждом факторе ряда $0 \leqslant C \leqslant A$. Следовательно, W абелева. По теореме Ремака $G/W \hookrightarrow G/C_G(C) \times \times G/C_G(A/C)$. Отсюда вытекает, что факторгруппа G/W полициклическая. Пусть $U = = W \bigcap FFD(G)$. По лемме 2 факторгруппа $G/FFD(G)$ является полициклической. Следовательно, факторгруппа G/U полициклическая. Кроме того, из включения $U \leqslant W$ следует, что подгруппа U абелева. По построению $U \leqslant FFD(G)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь гипер(локально разрешимые) AFF-группы. Напомним, что группа G называется гипер(локально разрешимой), если G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп

$$\langle 1 \rangle = G_0 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant \cdots \leqslant G_\gamma \leqslant \cdots \leqslant G_\delta = G \tag{2}$$

таким, что каждый фактор $G_{\gamma+1}/G_\gamma$, $\gamma < \delta$, локально разрешим [9, гл. 1].

Лемма 4. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — гипер(локально разрешимая)* AFF*-группа, и коцентрализатор группы G в модуле A конечен. Тогда группа G гиперабелева.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что каждый фактор $G_{\gamma+1}/G_\gamma$, $\gamma < \delta$, ряда (2) разрешим. С учетом леммы 1 получаем, что коцентрализатор $G_{\gamma+1}/G_\gamma$ для каждого $\gamma < \delta$ конечен. По лемме 3 каждый фактор $G_{\gamma+1}/G_\gamma$ разрешим. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — гипер(локально разрешимая)* AFF*-группа. Тогда группа G обладает рядом нормальных подгрупп*

$$\langle 1 \rangle = G_0 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant \cdots \leqslant G_\gamma \leqslant \cdots \leqslant G_\delta = G$$

таким, что каждый фактор $G_{\gamma+1}/G_\gamma$, $\gamma < \delta$, гиперабелев.

Доказательство. Так как группа G гипер(локально разрешима), G обладает рядом (2). Каждый фактор $G_{\gamma+1}/G_\gamma$, $\gamma < \delta$, ряда (2) — локально разрешимая AFF-группа. По теореме 2 каждый фактор $G_{\gamma+1}/G_\gamma$, $\gamma < \delta$, гиперабелев. Отсюда следует, что ряд (2) рассматриваемой группы G удовлетворяет требованиям теоремы. Теорема доказана.

Следует отметить, что все результаты, полученные в работе, не зависят от структуры ассоциативного кольца $\mathbf{R}$.

1. *Wehrfritz B. A. F.* Finite-finitary groups of automorphisms // J. Algebra Appl. – 2002. – **1**, No 4. – P. 375–389.
2. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 160–177.
3. *Дашкова О. Ю.* Локально разрешимые AFN-группы // Пробл. физики, математики и техники. – 2012. – № 3(12). – С. 58–64.
4. *Dashkova O. Yu.* On locally soluble AFN-groups // Algebra Discrete Math. – 2012. – **14**, No 1. – P. 37–48.
5. *Дашкова О. Ю.* О модульних аналогах антифинитарных линейных групп // Итоги науки. Юг России. Сер. Мат. форум. Т. 6. Группы и графы. – Владикавказ, 2012. – С. 18–24.
6. *Kurdachenko L. A., Muñoz-Escolano J. M., Otal J.* Antifinitary linear groups // Forum Math. – 2008. – **20**, No 1. – P. 27–44.
7. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – Москва: Наука, 1975. – 240 с.

8. *Курош А. Г.* Теория групп. – Москва: Наука, 1967. – 648 с.
9. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – Vol. 1, 2. – 464 p.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Поступило в редакцию 25.02.2013

О. Ю. Дашкова

Узагальнено розв'язні AFF-групи

Досліджено $\mathbf{R}G$*-модуль* A *такий, що* $\mathbf{R}$ — *асоціативне кільце,* $C_G(A) = 1$*, та кожна власна підгрупа* H *групи* G*, для якої* $\mathbf{R}$*-модуль* $A/C_A(H)$ *є нескінченним, скінченно породжена. Група* G*, яка задовольняє ці умови, називається* AFF*-групою. Доведено, що локально розв'язна* AFF*-група є гіперабелевою. Описано структуру* AFF*-групи* G *у випадку, коли* G *є скінченно породженою розв'язною групою та* $\mathbf{R}$*-модуль* $A/C_A(G)$ *є нескінченним.*

O. Yu. Dashkova

AFF-groups soluble in the extended sense

We study an $\mathbf{R}G$*-module* A *such that* $\mathbf{R}$ *is an associative ring,* $C_G(A) = 1$*, and each proper subgroup* H *of* G *with infinite* $A/C_A(H)$ *is finitely generated. The group* G *under consideration is called an* AFF*-group. It is proved that a locally soluble* AFF*-group is hyper-Abelian. We describe the structure of an* AFF*-group* G *such that* G *is a finitely generated soluble group, and* $\mathbf{R}$*–module* $A/C_A(G)$ *is infinite.*