

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Г. Стоян, В. В. Семкин,
А. М. Чугай

Построение начальных точек и поиск локальных экстремумов задачи компоновки 3D объектов в цилиндрической области

Построена математическая модель задачи поиска приближения к оптимальному размещению трехмерных объектов в цилиндрическую область минимальной высоты с зонами запрета и с учетом ограничений на минимально допустимые расстояния между объектами. На основании свойств математической модели предложен эффективный подход построения начальных точек и поиска локальных экстремумов. Приведен пример.

Применение математического и компьютерного моделирования при решении задач компоновки позволяет значительно улучшить качество получаемых решений. В задачах компоновки инженерно-технические объекты с определенной степенью точности могут быть представлены в виде параллелепипедов, цилиндров, сфер, их сегментов, а также тел, составленных из набора цилиндров, сфер и сегментов. Такое описание объектов целесообразно использовать при предварительной компоновке, например, при решении задачи поиска оптимального размещения объектов. Исходя из этого, в работе исследуется и решается следующая оптимизационная задача геометрического проектирования [1].

Постановка задачи. Задано множество трехмерных геометрических объектов O_i , $i \in I = \bigcup_{k=1}^6 I_k$ (рис. 1).

Объект O_i в зависимости от значения индекса i является одним из следующих множеств: если $i \in I_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$, то O_i является шаром

$$S_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 - (r_i^0)^2 \leq 0\};$$

если $i \in I_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, N_2 = n_1 + n_2\}$, то O_i является цилиндром

$$C_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - (r_i^0)^2 \leq 0, -h_i^0 \leq z \leq h_i^0\};$$

если $i \in I_3 = \{N_2 + 1, \dots, N_3 = N_2 + n_3\}$, то O_i является параллелепипедом

$$P_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : -a_i^0 \leq x \leq a_i^0, -b_i^0 \leq y \leq b_i^0, -c_i^0 \leq z \leq c_i^0\};$$

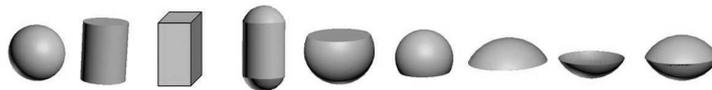


Рис. 1. Рассматриваемые геометрические объекты

© Ю. Г. Стоян, В. В. Семкин, А. М. Чугай, 2013

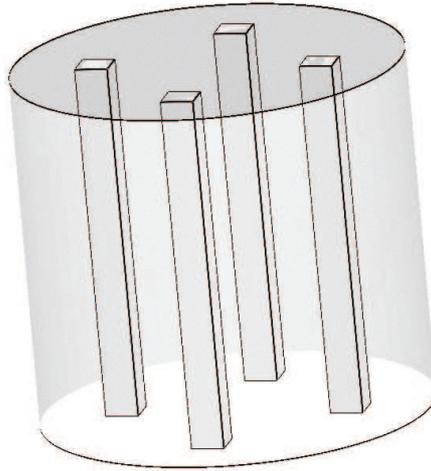


Рис. 2. Многосвязная область размещения

если $i \in I_4 = I_4^1 \cup I_4^2 = \{N_3+1, \dots, N_4 = N_3+n_4\}$, то O_i является сферическим сегментом вида

$$G_i = \{X = (x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 + (z + \tau_i)^2 - (\rho_i^0)^2 \leq 0, -z \leq 0\};$$

если $i \in I_5 = I_5^1 \cup I_5^2 = \{N_4+1, \dots, N_5 = N_4+n_5\}$, то O_i является сферическим сегментом вида

$$\check{G}_i = \{X = (x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 + (z - \tau_i)^2 - (\rho_i^0)^2 \leq 0, z \leq 0\},$$

где $\tau_q = \rho_q - w_q$, $w_q \in (0, 2\rho_q)$ — высота сегмента, $q \in I_4 \cup I_5$, а подмножества индексов I_4^1 , $I_4^2 \subset I_4$, $I_4^1 \cap I_4^2 = \emptyset$, $I_5^1, I_5^2 \subset I_5$, $I_5^1 \cap I_5^2 = \emptyset$ такие, что выполнены неравенства $\rho_{\alpha_1}^0 - w_{\alpha_1}^0 \geq 0$, $\alpha_1 \in I_4^1$, $w_{\alpha_2} - \rho_{\alpha_2} > 0$, $\alpha_2 \in I_4^2$, $\rho_{\beta_1}^0 - w_{\beta_1}^0 \geq 0$, $\beta_1 \in I_5^1$, $w_{\beta_2} - \rho_{\beta_2} > 0$, $\beta_2 \in I_5^2$;

если $i \in I_6 = \{N_5 + 1, \dots, n = N_5 + n_6\}$, то O_i — это сфероцилиндр $SC_i = C_i \cup G_{i1} \cup \check{G}_{i2}$, где

$$C_i = \{X = (x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 - (r_i^0)^2 \leq 0, -h_i^0 \leq z \leq h_i^0\},$$

$$G_{i1} = \{X = (x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 + (z + \tau_{i1})^2 - (\rho_{i1}^0)^2 \leq 0, -z \leq 0\},$$

$$\check{G}_{i2} = \{X = (x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 + (z - \tau_{i2})^2 - (\rho_{i2}^0)^2 \leq 0, z \leq 0\},$$

$\tau_{ij} = \rho_{ij}^0 - w_{ij}^0$, $\rho_{ij}^0 = ((r_i^0)^2 + (w_{ij}^0)^2)/(2w_{ij}^0)$, $j = 1, 2$, w_{ij}^0 — высота сферических сегментов.

Задана также многосвязная область размещения $T \in R^3$ (рис. 2), которая может быть представлена в виде

$$T = cl\left(C \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\sigma} P^j\right)\right),$$

где clD — замыкание множества D , $C = \{X = (x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 - r^2 \leq 0, h_1 \leq z \leq h_2, h_1 > 0\}$; P_j — прямые прямоугольные призмы, являющиеся зонами запрета на размещение объектов.

Контейнер T высотой $h = h_2 - h_1$ обозначим $T(h)$. Начало собственной системы координат P^j находится в точке $\dot{u}_j = (\dot{x}_j, \dot{y}_j, 0) \in R^3$, $j \in I_\sigma = \{1, \dots, \sigma\}$.

Обозначим через $\hat{\gamma}_i = (\hat{\gamma}_{i1}, \dots, \hat{\gamma}_{i\kappa_i})$ вектор метрических характеристик объекта O_i , $i \in I$. При этом, если $i \in I_1$, то $\hat{\gamma}_i = r_i$; если $i \in I_2$, то $\hat{\gamma}_i = (r_i, h_i)$; если $i \in I_3$, то $\hat{\gamma}_i = (a_i, b_i, c_i)$; если $i \in I_4$ или $i \in I_5$, то $\hat{\gamma}_i = (\rho_i, w_i)$; если $i \in I_6$, то $\hat{\gamma}_i = (r_i, h_i, w_{i1}, w_{i2})$. Сформируем общий вектор заданных метрических характеристик всех объектов: $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \dots, \gamma_\omega^0) \in R^\omega$, $\omega = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 4n_6$.

Объекты O_i , $i \in I$, допускают лишь аффинные преобразования трансляции. Объект O_i , $i \in I$, транслированный на вектор $u_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$, обозначим $O_i(u_i)$. Вектор $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^{3n}$ определяет положение всех объектов в R^3 .

Ограничения на область допустимых решений в задачах компоновки можно сформулировать в виде условий непересечения объектов между собой и областью размещения, а также расположения объектов на минимально допустимых расстояниях для устранения механических, тепловых, электрических и других воздействий одного объекта на другой. Поэтому на размещение объектов O_i , $i \in I$, заданы также ограничения в виде следующих минимально допустимых расстояний: $d_{ij} = \min_{x \in O_i, y \in O_j} \|x - y\|$, $i, j \in I$; $d_i^t = \min_{x \in O_i, y \in P^t} \|x - y\|$, $i \in I, t \in I_\sigma$; $d_i = \min_{x \in O_i, y \in \widehat{C}} \|x - y\|$, $d_i^U = \min_{x \in O_i, y \in \overline{C}} \|x - y\|$, $d_i^L = \min_{x \in O_i, y \in \underline{C}} \|x - y\|$, $i \in I$, где \widehat{C} , \overline{C} и \underline{C} являются соответственно боковой, верхней и нижней гранями цилиндра C .

Задача. Найти вектор $u \in R^{3n}$ такой, что объекты O_i , $i \in I$, содержатся в T с учетом заданных минимальных расстояний и h достигает минимума.

Для построения адекватной математической модели воспользуемся аппаратом нормализованных Φ -функций [2]. В работах [3–7] построены нормализованные Φ -функции для рассматриваемых геометрических объектов. Тогда математическая модель поставленной задачи имеет вид

$$h^* = \min h, \quad (u, h) \in W \subset R^{3n+2}, \quad (1)$$

где

$$W = \{(u, h) \in R^{3n+2} : \Phi_{ij}^{O_i O_j}(u_i, u_j) - d_{ij} \geq 0, \Phi_k^{O_k P^t}(u_k) - d_k^t \geq 0, \Phi_k^{O_k}(u_k) - d_k \geq 0, \\ L_k^{O_k}(u_k, h) - d_k^L \geq 0, U_k^{O_k}(u_k, h) - d_k^U \geq 0, i < j \in I, k \in I, t \in I_\sigma\}. \quad (2)$$

Свойства математической модели, определяющие выбор метода решения задачи, следующие:

- 1) задача (1), (2) является обратной выпуклой;
- 2) область допустимых решений W в общем случае несвязна, а каждая компонента связности многосвязная;
- 3) $W = \bigcup_{i=1}^{\mu\nu} W_i$, где $\nu = 3^{s_{14}+s_{15}} \cdot 4^{s_{45}} \cdot 5^{s_{2}+s_4+s_5+s_{12}+s_{16}} \cdot 6^{s_{24}+s_{25}} \cdot 7^{s_6+s_{26}+s_{46}} \cdot 26^{s_3+s_{13}+s_{23}} \times \\ \times 34^{s_{34}+s_{35}} \cdot 42^{s_{36}}$, $\mu = 26^{(n_1+n_2+n_3)\sigma} \cdot 34^{(n_4+n_5)\sigma} \cdot 42^{n_6\sigma}$, $s_i = n_i(n_i - 1)/2$, $s_{ij} = n_i n_j$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$;
- 4) каждая из подобластей W_i описывается системой нелинейных неравенств и имеет “овражный” характер;
- 5) матрица, задающая систему ограничений, имеет высокую степень разреженности;
- 6) локальные минимумы могут быть нестрогими;

7) глобальный экстремум оптимизационной задачи размещения геометрических объектов теоретически может быть получен с помощью решения последовательности нелинейных многоэкстремальных задач на множестве подобластей, объединение которых формирует область допустимых решений задачи;

8) задача является *NP*-трудной [8].

Известные методы исследования операций пока не позволяют получить глобальный экстремум для практических задач компоновки.

В данной работе рассмотрим один из возможных подходов к поиску начальных точек и локальных экстремумов.

При решении оптимизационных задач размещения геометрических объектов для получения начальных точек используются различные “жадные” алгоритмы [8]. Поскольку суть таких алгоритмов заключается в принятии локально оптимальных решений на каждом этапе, то они не гарантируют получения разнообразных начальных точек, а соответственно значительно сужают множество рассматриваемых локальных оптимумов. Кроме того, следует отметить, что вычислительные затраты для построения начальных точек значительно возрастают в трехмерном случае.

В связи с этим предлагается следующий подход для получения начальных точек. Положим метрические характеристики рассматриваемых объектов переменными. Общий вектор переменных метрических характеристик обозначим через $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\omega) \in R^\omega$. Обозначим вектор переменных $X = (u, \gamma) \in R^{3n+\omega}$.

Для получения начальной точки зададим значение $h = h^0$. При этом h^0 выбирается таким образом, что объекты гарантированно размещаются в $T(h^0)$. Сформируем точку $\tilde{X} = (\tilde{u}, 0)$, где вектор \tilde{u} генерируется случайным образом так, что $\tilde{u}_i \in T(h^0)$, $i \in I$. Взяв точку \tilde{X} в качестве начальной, решим задачу

$$F(\tilde{\gamma}) = \max F(\gamma), \quad X \in \Omega \subset R^{3n+\omega}, \quad (3)$$

где

$$F(\gamma) = \sum_{i \in I_\omega} \gamma_i,$$

$$\begin{aligned} \Omega = \{ X = (u, \gamma) \in R^{3n+\omega} : & \Phi_{ij}^{O_i O_j}(u_i, u_j, \gamma_i, \gamma_j) - d_{ij} \geq 0, \Phi_k^{O_k P^t}(u_k, \gamma_k) - d_k^t \geq 0, \\ & \Phi_k^{O_k}(u_k, \gamma_k) - d_k \geq 0, L_k^{O_k}(u_k, \tilde{\gamma}_k, h^0) - d_k^L \geq 0, U_k^{O_k}(u_k, \gamma_k, h^0) - d_k^U \geq 0, \\ & \gamma_q^0 - \gamma_q \geq 0, \rho_{\alpha_1} - w_{\alpha_1} \geq 0, w_{\alpha_2} - \rho_{\alpha_2} \geq 0, \rho_{\beta_1} - w_{\beta_1} \geq 0, w_{\beta_2} - \rho_{\beta_2} \geq 0, \\ & r_s - w_{s1} \geq 0, r_s - w_{s2} \geq 0, i < j \in I, k \in I, q \in I_\omega = \{1, \dots, \omega\}, s \in I_6, \\ & \alpha_1 \in I_4^1, \alpha_2 \in I_4^2, \beta_1 \in I_5^1, \beta_2 \in I_5^2, t \in I_\sigma \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть в результате решения задачи (3), (4) получим точку локального максимума $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$. Если точка локального максимума \tilde{X} такая, что $F(\tilde{\gamma}) = \Sigma$, где $\Sigma = \sum_{i \in I_\omega} \gamma_i^0$, то $(\tilde{u}, h^0) \in W$, является точкой глобального максимума задачи (3), (4) и может быть взята в качестве начальной точки для поиска локального минимума задачи (1), (2) (см. рис. 3, а).

Если $F(\tilde{\gamma}) < \Sigma$, то, по крайней мере, один размер γ_q не достиг своего заданного значения γ_q^0 . В этом случае точка \tilde{X} является точкой либо локального, либо глобального максимума задачи (3), (4).

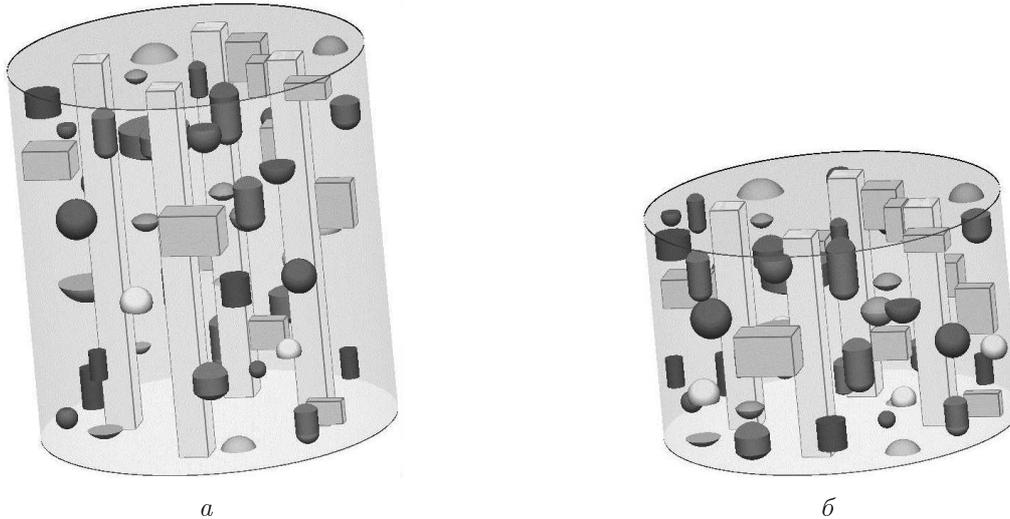


Рис. 3. Начальная точка и локальный минимум для задачи размещения 55 объектов

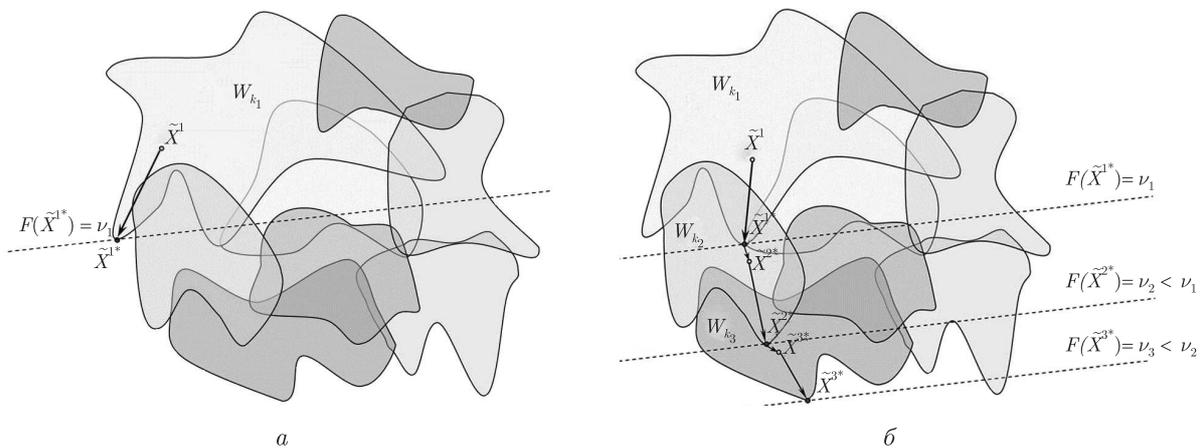


Рис. 4. Схема поиска локального минимума задачи (1), (2)

Если $F(\tilde{\gamma}) = \Sigma$, то взяв начальную точку $(\tilde{u}, h^0) \in W$, вычисляем локальный минимум задачи (1), (2). В результате получим точку локального минимума $(u^{*0}, h^{*0}) \in W$ (см. рис. 3, б).

Поиск локального минимума задачи (1), (2) осуществляется следующим образом. Для начальной точки $\tilde{X}^1 = \tilde{X} \in W$ выделяется одна из подобластей $W_{k_1} \in W$, которая содержит \tilde{X}^1 . На выделенной подобласти решается задача (1), (2). Найденный в результате решения задачи локальный минимум \tilde{X}^{1*} может быть локальным минимумом как всей задачи (рис. 4, а), так и локальным минимумом только для подобласти W_{k_1} (рис. 4, б). Если существуют другие подобласти $W_{k_j} \in W$, для которых $\tilde{X}^{1*} \in W_{k_j}$, $j = 2, \dots, \vartheta$, и точка \tilde{X}^{1*} не является локальным минимумом для этих подобластей, то вновь решается задача поиска локального минимума на одной из этих подобластей. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найден локальный минимум задачи (1), (2) (рис. 4, б).

Поиск локального минимума на подобластях может быть произведен различными методами нелинейной оптимизации. Например, в работе [9] предложена модификация метода

возможных направлений, основанная на концепции набора ε -активных ограничений. Следует отметить, что поскольку метод использует только первые производные, то он обладает большими временными затратами. Кроме того, метод не позволяет получить решение, если матрица системы ограничений является плохо обусловленной. Для того чтобы преодолеть эти недостатки, для поиска решения задач (3), (4) и (1), (2) применялся метод внутренней точки, который в настоящее время является мощным инструментом, позволяющим решать практические задачи большой размерности. Ключевая идея метода состоит в исключении из задачи ограничений-неравенств с помощью введения в целевую функцию логарифмического или квадратичного штрафа за приближение к границам допустимой области. Большинство распространенных библиотек (BRMPD, NORDM, IPOPT), в которых реализованы алгоритмы внутренних точек, демонстрируют свою эффективность как на задачах с заполненными матрицами, так и на задачах с блочной структурой и высокой степенью разреженности, а также на плохо обусловленных задачах.

Поскольку библиотеки BRMPD и NORDM не используют матрицу Гессе, то нами была использована библиотека IPOPT. Это позволило сократить время поиска локальных экстремумов по сравнению с применением метода возможных направлений. Так, например, время поиска начальной точки и соответствующего ей локального минимума для задачи компоновки 55 объектов (см. рис. 3) с использованием библиотеки IPOPT составило 34 с вместо 120 с при применении модификации метода возможных направлений (вычислительный эксперимент проводился с использованием компьютера на базе процессора Intel Core I5). При этом с учетом большой размерности задачи и сложного вида функций, формирующих область допустимых решений, использовалось квазиньютоновское приближение матрицы Гессе. Следует отметить, что время решения задачи может быть уменьшено за счет применения современных технологий параллельных вычислений.

Таким образом, применение метода Ф-функций для построения математической модели задачи компоновки позволило использовать для построения начальных точек и поиска локальных экстремумов задачи современные методы градиентной оптимизации.

1. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 268 с.
2. Stoyan Yu. G. Φ -function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 112–117.
3. Стоян Ю. Г., Чугай А. М. Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений // Электрон. моделирование. – 2008. – 30, № 5. – С. 3–20.
4. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Шайтхауэр Г. Математическое моделирование взаимодействий базовых геометрических 3D объектов // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 19–31.
5. Семкин В. В., Чугай А. М. Нормализованная Ф-функция сферических сегментов // Доп. НАН України. – 2012. – № 12. – С. 41–48.
6. Семкин В. В., Чугай А. М. Нормализованная Ф-функция параллелепипеда и сфероцилиндра // Там само. – 2013. – № 2. – С. 36–41.
7. Семкин В. В., Чугай А. М. Нормализованные Ф-функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцилиндром // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер. “Мат. моделювання. Інформ. технології. Автоматизовані системи управління”. – 2012. – № 1037, вип. 20. – С. 190–201.
8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. – Москва: Вильямс, 2005. – 1296 с.
9. Stoyan Y. G., Zlotnik, M. V., Chugay, A. M. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region // J. of the Operational Research Society. – 2012. – No 63 (3). – P. 379–391.

Член-кореспондент НАН України Ю. Г. Стоян, В. В. Сьомкін, А. М. Чугай

Побудова початкових точок і пошук локальних екстремумів задачі компоновки 3D об'єктів у циліндричній області

Побудовано математичну модель задачі пошуку наближення до оптимального розміщення тривимірних об'єктів у циліндричній області мінімальної висоти із зонами заборони та із урахуванням обмежень на мінімально припустимі відстані між ними. На підставі властивостей математичної моделі запропоновано ефективний підхід побудови стартових точок і пошуку локальних екстремумів. Наведено приклад.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine Yu. G. Stoyan, V. V. Semkin,
A. M. Chugay

Constructing the starting points and searching for the local extrema of the layout problem of 3D objects in a cylindrical domain

We construct a mathematical model of the problem of finding an approximation to the optimal placement of 3D objects in a cylindrical domain of the minimal height with prohibition zones with regard for minimum admissible distances between them. In order to construct the starting points and to find the local extrema of the problem, an effective approach based on properties of the mathematical model is proposed. An example is given.