ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

О линейных группах с ограничениями на систему всех собственных подгрупп

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$ — линейная группа над конечным полем F, $G \neq G'$, $|G| \neq q^k$, где q — простое число, и для каждой собственной подгруппы H группы G факторпространство $A/C_A(H)$ конечномерно. Доказано, что факторпространство $A/C_A(G)$ конечномерно, и описана структура группы G.

Группа G всех автоморфизмов векторного пространства A над полем F называется полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}(F, A)$. Подгруппы группы $\mathrm{GL}(F, A)$ называются линейными группами. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях математики и изучались достаточно много. В случае, когда размерность векторного пространства A над полем F бесконечна, подгруппы группы $\mathrm{GL}(F, A)$ исследованы значительно меньше. Изучение этого класса групп возможно лишь при наложении дополнительных ограничений на рассматриваемые группы. К таким ограничениям относятся различные условия конечности.

Одним из условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например, [1, 2]). Финитарные линейные группы изучались многими авторами, что привело к появлению ряда важных и интересных результатов [2].

В [3] авторы ввели в рассмотрение понятие центральной размерности линейной группы. Пусть H — подгруппа группы $\mathrm{GL}(F, A)$. Тогда H действует на факторпространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Размерность факторпространства $A/C_A(H)$ называется центральной размерностью группы H и обозначается $\mathrm{centdim}_F(H)$ [3].

Естественно возникает вопрос об исследовании бесконечномерных линейных групп, у которых система $\mathfrak{L}_{\mathrm{id}}(G)$ подгрупп бесконечной центральной размерности рассматриваемой линейной группы G "достаточно мала". В [3] рассматривались почти локально разрешимые линейные группы бесконечной центральной размерности, у которых система $\mathfrak{L}_{\mathrm{id}}(G)$

удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Как оказалось, почти локально разрешимая бесконечномерная линейная группа, удовлетворяющая заданному условию, разрешима. В [4] получено описание структуры разрешимых линейных групп бесконечной центральной размерности, у которых система $\mathfrak{L}_{\mathrm{id}}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество. В [5] изучались локально разрешимые линейные группы бесконечной центральной размерности и бесконечного ранга, у которых каждая собственная подгруппа бесконечного ранга имеет конечную центральную размерность. Рассматривались локально разрешимые линейные группы бесконечного секционного p-ранга, бесконечного абелева секционного ранга, бесконечного специального ранга. Доказано, что локально разрешимая линейная группа, удовлетворяющая заданным условиям, разрешима, и описана ее структура.

В [3] исследовались почти локально разрешимые линейные группы бесконечной центральной размерности, у которых каждая собственная подгруппа имеет конечную центральную размерность, и, следовательно, система подгрупп $\mathfrak{L}_{\mathrm{id}}(G)$ включает в себя лишь саму группу G. Как оказалось, в этом случае бесконечномерная линейная группа G изоморфна квазициклической q-группе C_{q^∞} для некоторого простого числа q. В [3] построен пример линейной группы бесконечной центральной размерности над бесконечным полем простой характеристики p, удовлетворяющей указанным условиям и изоморфной квазициклической q-группе C_{q^∞}, $q \neq p$.

В настоящей работе изучаются линейные группы, у которых каждая собственная подгруппа имеет конечную центральную размерность. Рассматриваются линейные группы над конечными полями, отличные от своего коммутанта.

Лемма 1. *Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$. Имеют место следующие утверждения:*

1) если $L \leqslant H \leqslant G$ и $\mathrm{centdim}_F(H)$ конечна, то $\mathrm{centdim}_F(L)$ также конечна;

2) если L, $H \leqslant G$ и размерности $\mathrm{centdim}_F(L)$ и $\mathrm{centdim}_F(H)$ конечны, то центральная размерность подгруппы $\langle L, H\rangle$ также конечна.

Лемма 2. *Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$, G — бесконечная группа, $G \neq G'$. Если центральная размерность группы G бесконечна, а для каждой собственной подгруппы H группы G размерность $\mathrm{centdim}_F(H)$ конечна, то группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, а факторгруппа G/G' изоморфна квазициклической q-группе C_{q^∞} для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Докажем сначала, что G — бесконечно порожденная группа. Предположим противное. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — минимальная система порождающих группы G. Если $m = 1$, то G — бесконечная циклическая группа. Следовательно, G порождается двумя собственными подгруппами. По лемме 1 размерность $\mathrm{centdim}_F(G)$ конечна. Противоречие. Если $k > 1$, то группа G порождается двумя собственными подгруппами $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\rangle$ и $\langle x_m\rangle$. Снова получаем противоречие. Отсюда вытекает, что G — бесконечно порожденная группа.

Докажем теперь, что G не имеет собственных подгрупп конечного индекса. В противном случае, если N — собственная подгруппа группы G конечного индекса, то можно выбрать конечно порожденную подгруппу M так, чтобы $G = MN$, где M и N — собственные подгруппы группы G. По лемме 1 центральная размерность группы G конечна. Противоречие.

Пусть D — коммутант группы G. Так как G не содержит собственных подгрупп конечного индекса и $G \neq G'$, то факторгруппа G/D бесконечна. По лемме 1 абелева факторгруппа G/D не может порождаться двумя собственными подгруппами. Если факторгруппа G/D — непериодическая и T/D — периодическая часть G/D, то G/T порождается двумя собственными подгруппами. Противоречие с леммой 1. Следовательно, G/D — периодическая факторгруппа, и поэтому G/D изоморфна квазициклической q-группе C_{q^∞} для некоторого простого числа q [6, с. 152]. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$, $G \neq G'$, F — конечное поле. Если каждая собственная подгруппа группы G имеет конечную центральную размерность и $|G| \neq q^k$, где q — простое число, то группа G имеет конечную центральную размерность.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай бесконечной группы G. Предположим, что размерность $\mathrm{centdim}_F(G)$ бесконечна. Пусть D — коммутант группы G. По лемме 2 факторгруппа G/D изоморфна квазициклической q-группе C_{q^∞} для некоторого простого числа q. Следовательно, факторгруппа G/D является объединением конечных характеристических подгрупп. Пусть H — собственная подгруппа группы G такая, что $D \leqslant H$. Центральная размерность подгруппы H конечна. Отсюда ввиду конечности поля F вытекает, что факторпространство $A/C_A(H)$ конечно. Следовательно, факторгруппа $G/C_G(A/C_A(H))$ конечна. По лемме 2 группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, поэтому $G = C_G(A/C_A(H))$. Следовательно, $[G, A] \leqslant C_A(H)$. С учетом выбора подгруппы H получаем, что $[G, A] \leqslant C_A(G)$. Тогда G действует тождественно в каждом факторе ряда

$$0 \leqslant C_A(G) \leqslant A.$$

По теореме Калужнина [7, с. 144] группа G абелева. Пусть группа G не является периодической и пусть T — периодическая часть G. Тогда факторгруппа G/T порождается двумя собственными подгруппами. Противоречие с леммой 1. Следовательно, группа G периодическая, и поэтому G изоморфна квазициклической q-группе C_{q^∞} для некоторого простого числа q [6, с. 152]. Так как G — бесконечная финитарная абелева черниковская q-подгруппа $\mathrm{GL}(F, A)$, то по лемме 5.1 [3] $q \neq p$, где p — характеристика поля F. С другой стороны, группа G действует тождественно в каждом факторе ряда $0 \leqslant C_A(G) \leqslant A$. Каждый фактор данного ряда является элементарной абелевой p-группой. Отсюда ввиду утверждения 1.C.3 [8] и результатов § 43 [9, гл. 8] получаем, что G — ограниченная абелева p-группа. Противоречие. Следовательно, центральная размерность группы G конечна.

Пусть теперь группа G конечна. Поскольку $|G| \neq q^k$, где q — простое число, то можно выбрать такую систему порождающих $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ группы G, что $m > 1$, и для любого натурального $l = 1, \ldots, m$ множество $\{g_1, g_2 \ldots, g_m\} \setminus \{g_l\}$ не является системой порождающих группы G. Следовательно, для любого натурального $l = 1, \ldots, m$ подгруппа $\langle g_l \rangle$ является собственной подгруппой группы G и имеет конечную центральную размерность. Отсюда вытекает, что факторпространство $A/\bigcap_{i=1,\ldots,m} C_A(g_i)$ конечномерно и центральная размерность группы G конечна. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$, $G \neq G'$, F — конечное поле простой характеристики p. Если каждая собственная подгруппа группы G имеет конечную центральную размерность и $|G| \neq q^k$, где q — простое число, то группа G содержит элементарную абелеву p-подгруппу H такую, что факторгруппа G/H изоморфна некоторой подгруппе $\mathrm{GL}_n(F)$.*

Доказательство. По теореме группа G имеет конечную центральную размерность. Согласно [3] G содержит элементарную абелеву p-подгруппу H такую, что факторгруппа G/H изоморфна некоторой подгруппе $\mathrm{GL}_n(F)$. Следствие доказано.

Полученный результат свидетельствует о том, что конечность поля существенно влияет на структуру линейной группы, все собственные подгруппы которой имеют конечную центральную размерность.

1. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a surve // Finite and locally finite groups / NATO ASI ser. C. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – **471**. – P. 111–146.
2. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **19**, No 2. – P. 400–448.
3. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // Ibid. – 2004. – **277**, No 1. – P. 172–186.
4. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. – 2006. – **50**, No 1. – P. 103–131.
5. *Dashkova O. Yu., Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension // J. Pure Appl. Algebra. – 2007. – **208**, No 3. – P. 785–795.
6. *Курош А. Г.* Теория групп. – Москва: Наука, 1967. – 648 с.
7. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – Москва: Наука, 1972. – 240 с.
8. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups / North-Holland Mathematical Library. Vol. 3. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 210 p.
9. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. – Москва: Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Поступило в редакцию 28.05.2013

О. Ю. Дашкова

Про лінійні групи з обмеженнями на систему всіх власних підгруп

Нехай $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$ — лінійна група над скінченним полем F, $G \neq G'$, $|G| \neq q^k$, де q — просте число, та для кожної власної підгрупи H групи G факторпростір $A/C_A(H)$ є скінченновимірним. Доведено, що факторпростір $A/C_A(G)$ є скінченновимірним, та описано структуру групи G.

O. Yu. Dashkova

On linear groups with restrictions on the system of all proper subgroups

Let $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$ be a linear group over a finite field F, $G \neq G'$, $|G| \neq q^k$, where q is prime, and let $A/C_A(H)$ be a finite-dimensional quotient space for each proper subgroup H of G. It is proved that $A/C_A(G)$ is the finite-dimensional quotient space, and the structure of a group G is described.