УДК 519.1

Б. В. Олійник

Групи ізометрій розширеного простору Хеммінга та нескінченновимірного гіперкуба

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглянуто конструкцію розширеного простору Хеммінга — простору нескінченних послідовностей над деяким скінченним алфавітом, відстань між двома послідовностями в якому обчислюється як число їх попарно різних координат (у випадку, коли воно скінченне) і дорівнює ∞, якщо таких координат нескінченна кількість. Введеному простору взаємно однозначно відповідає незв'язний граф — нескінченновимірний гіперкуб. Охарактеризовано групу ізометрій розширеного простору Хеммінга в термінах вінцевих добутків, а отже, й групу автоморфізмів нескінченновимірного гіперкуба.

1. Нехай n — деяке натуральне число. Нагадаємо, що простором Хеммінга (H_n, d_{H_n}) називається метричний простір, заданий на множині всіх булевих векторів довжини n, відстань d_{H_n} між якими визначається як кількість їх попарно різних координат:

$$d_{H_n}(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \tag{1}$$

де $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in H_n$. Простір Хеммінга H_n природним чином визначає граф, що називається гіперкубом вимірності n, вершинами якого є точки простору H_n, і дві вершини $\overline{x}$, $\overline{y} \in H_n$ з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли $d_{H_n}(\overline{x}, \overline{y}) = 1$, тобто вектори $\overline{x}$ і $\overline{y}$ відрізняються однією координатою. І навпаки, якщо визначити гіперкуб вимірності n як граф, вершинами якого є $(0, 1)$-послідовності довжини n, і дві послідовності з'єднані ребром, якщо вони відрізняються лише однією координатою, то метричний простір, який визначається цим графом (тобто простір, заданий на множині вершин графа, відстань між вершинами визначається як довжина найкоротшого шляху, що їх з'єднує), буде простором Хеммінга. Тому простір Хеммінга і гіперкуб даної вимірності часто ототожнюють. Група ізометрій простору Хеммінга або група автоморфізмів гіперкуба H_n добре відома. Це так звана гіпероктаедральна група, яка ізоморфна вінцевому добутку $S_n \wr C_2$ симетричної групи S_n степеня n і циклічної групи C_2 порядку 2.

До нескінченно вимірних узагальнень просторів Хеммінга можна віднести зліченний простір Хеммінга [1, 2], простір Безіковича або Безіковича–Хеммінга [3, 4], простори Хеммінга періодичних послідовностей [2, 5], а як узагальнення гіперкуба скінченної вимірності — нескінченновимірний гіперкуб [7].

У повідомленні розглядається розширений простір Хеммінга і розширений узагальнений простір Хеммінга та пов'язані з ними нескінченновимірні графи, які природно називати нескінченновимірними гіперкубами. При цьому метричний підпростір розширеного простору Хеммінга, який є ізометричним зліченному простору Хеммінга, визначає зв'язну компоненту нескінченновимірного гіперкуба. Основним результатом повідомлення є характеризація групи ізометрій розширеного простору Хеммінга, як над множиною $(0,1)$-послідовностей, так і над довільною скінченною множиною.

2. Нехай X — деяка непорожня множина, $[0;+\infty] = [0;+\infty) \bigcup \{\infty\}$. Функція $d\colon X \times X \to \to [0;+\infty]$ називається *розширеною метрикою* (див., наприклад, [6, с. 4]), якщо виконуються такі умови:

1) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$;

2) $d(x,y) = d(y,x)$;

3) для функції d виконується нерівність трикутника.

Пара (X,d) називається *розширеним метричним простором.* Різниця між метричним простором і розширеним метричним простором полягає в тому, що метрика останнього може набувати значень ∞.

Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — деяка зліченна множина, $\mathrm{Bool}(A)$ — множина всіх підмножин множини A. Визначимо функцію

$$d_{H_{\mathbb{R}}}\colon \mathrm{Bool}(A) \times \mathrm{Bool}(A) \to [0;+\infty]$$

для довільних U, $V \in \mathrm{Bool}(A)$ таким чином:

$$d_{H_{\mathbb{R}}}(U,V) = |U \bigtriangleup V|,$$

де $\bigtriangleup$ — знак симетричної різниці множин, причому $|U \bigtriangleup V| = \infty$, якщо $U \bigtriangleup V$ — нескінченна множина. Функція d_H є розширеною метрикою на $\mathrm{Bool}(A)$. Розширений метричний простір $(\mathrm{Bool}(A), d_H)$ називатимемо *розширеним простором Хеммінга*, а оскільки він визначається на континуальній множині, позначатимемо його $H_{\mathbb{R}}$. Кожній підмножині $U \in \mathrm{Bool}(A)$ можна поставити у відповідність її характеристичну функцію, що однозначно визначає нескінченну $(0,1)$-послідовність. Тому $H_{\mathbb{R}}$ допускає іншу інтерпретацію: він є розширеним метричним простором, визначеним на множині усіх нескінченних $(0,1)$-послідовностей, відстань між якими дорівнює числу попарно різних координат у випадку, коли послідовності відрізняються скінченним числом координат, та дорівнює ∞, якщо кількість таких координат нескінченна.

Зліченний метричний підпростір $H_{\mathbb{N}}$ розширеного простору $H_{\mathbb{R}}$, який складається з тих $(0,1)$-послідовностей, що мають тільки скінченну кількість ненульових координат, в роботі [1] названо зліченним простором Хеммінга. Не важко переконатися, що має місце таке твердження.

Твердження 1. *Розширений простір Хеммінга $H_{\mathbb{R}}$ можна зобразити у вигляді континуального диз'юнктного об'єднання підпросторів, ізометричних $H_{\mathbb{N}}$, причому так, що відстань між двома довільними точками ізометричних копій $H_{\mathbb{N}}$ дорівнюватиме ∞.*

Розширений простір Хеммінга $H_{\mathbb{R}}$ визначає простий граф — нескінченновимірний гіперкуб, вершинами якого є точки простору $H_{\mathbb{R}}$, які трактуємо як нескінченні $(0,1)$-послідовності, причому дві $(0,1)$-послідовності з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли вони відрізняються тільки однією координатою (див. [7]). Нескінченновимірний гіперкуб є незв'язним графом, а його компоненти зв'язності попарно ізоморфні. Крім того, метричні простори, що визначаються компонентами зв'язності цього гіперкуба, ізометричні зліченному простору Хеммінга $H_{\mathbb{N}}$.

3. Нагадаємо означення вінцевого добутку груп підстановок. Нехай (G_1, X_1), (G_2, X_2) — групи підстановок. Група підстановок $(G, X_1 \times X_2) = (G_1, X_1) \wr (G_2, X_2)$ називається *вінцевим добутком груп* (G_1, X_1) і (G_2, X_2) (див. [8]), якщо для кожного елемента $u \in G$ виконуються такі умови:

1) якщо $(x_1, x_2)^u = (y_1, y_2)$, то значення y_1 залежить лише від x_1;

2) для фіксованого x_1 відображення $g_2(x_1)$, що визначається рівністю $g_2(x_1)(x_2) = y_2$, є перетворенням множини X_2 і належить групі G_2.

З означення випливає, що елементи $u \in G$ можна задавати так званими таблицями $u = [g_1, g_2(x_1)]$, де $g_1 \in G_1$, $g_2(x_1) \in G_2^{X_1}$. При цьому кожне перетворення $u \in G$ діє на елементи $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ за таким правилом

$$(x_1, x_2)^u = (x_1^{g_1}, x_2^{g_2(x_1)}).$$

Крім такої реалізації групи $G_1 \wr G_2$ розглядається також реалізація цієї групи на множині $X_2^{X_1}$. А саме, експоненціюванням (G_2, X_2) за допомогою (G_1, X_1) називається група підстановок $(G_1 \wr G_2, X_2^{X_1})$, кожен елемент якої $u = [g_1, g_2(x_1)]$ діє на функцію $f(t) \in X_2^{X_1}$ за правилом:

$$f(t)^{[g_1, g_2(x_1)]} = f(t_1^{g})^{g_2(x_1)}.$$

У цій роботі використовуватиметься остання реалізація вінцевого добутку, тобто експоненціювання груп підстановок.

Нехай $S_{\mathbb{N}}$, $S_{\mathbb{R}}$ — симетричні групи над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$ і множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$ відповідно, C_2 — регулярна циклічна група другого порядку. Носієм функції $g_2(x_1) \in C_2^{\mathbb{N}}$ називається множина $\operatorname{supp}(g_2)$ всіх таких $x_1 \in \mathbb{N}$, що $g_2(x_1) \neq \mathrm{Id}_{C_2}$. Група $S_{\mathbb{N}} \wr C_2$ містить підгрупу

$$S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2 = \{[g_1, g_2(x_1)] \mid |\operatorname{supp}(g_2)| < \infty\},$$

яка називається обмеженим вінцевим добутком груп підстановок $S_{\mathbb{N}}$ і C_2.

Нам потрібне буде таке твердження з [1], яке сформулюємо у вигляді леми.

Лема 1 [1]. *Група ізометрій зліченного простору Хеммінга $H_{\mathbb{N}}$ ізоморфна обмеженому вінцевому добутку $S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2$.*

Пізніше в [7] лему 1 було доведено в термінах груп автоморфізмів компоненти зв'язності нескінченновимірного гіперкуба. Крім того, в цій роботі було також показано, що звуження кожного автоморфізму нескінченновимірного гіперкуба на довільну його компоненту зв'язності збігається зі звуженням деякого регулярного автоморфізму на цю компоненту зв'язності. Узагальнимо цей результат, подаючи точне описання групи всіх ізометрій розширеного простору Хеммінга $H_{\mathbb{R}}$.

Теорема 1. *Група ізометрій розширеного простору Хеммінга $H_{\mathbb{R}}$ ізоморфна вінцевому добутку $S_{\mathbb{R}} \wr (S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2)$.*

Доведення. Спочатку покажемо, що кожен елемент $u \in S_{\mathbb{R}} \wr (S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2)$ діє як ізометрія на просторі $H_{\mathbb{R}}$. Справді, елемент u задається таблицею $u = [g, h(x)]$, де $g \in S_{\mathbb{R}}$ і $h(x) \colon \mathbb{R} \to \to S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2$. З твердження 1 випливає, що елемент g переставляє підпростори, ізометричні $H_{\mathbb{N}}$, а отже, ізометричні між собою. Крім того, на кожному з таких підпросторів елемент u діє як деякий елемент групи $S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2$, який, згідно з лемою 1, діє як ізометрія. Отже, u діє як ізометрія на всьому розширеному просторі $H_{\mathbb{R}}$.

Нехай тепер f — деяка ізометрія простору $H_{\mathbb{R}}$. З твердження 1 випливає, що простір $H_{\mathbb{R}}$ можна зобразити в такому вигляді:

$$H_{\mathbb{R}} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} H_{\mathbb{N}}^{\alpha},$$

де $H_{\mathbb{N}}^{\alpha}$ — ізометричні копії простору $H_{\mathbb{N}}$, причому $H_{\mathbb{N}}^{\alpha_1} \bigcap H_{\mathbb{N}}^{\alpha_2} = \varnothing$, якщо $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Крім того, для довільних різних чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ і для довільних точок x_1, $x_2 \in H_{\mathbb{R}}$ таких, що $x_1 \in H_{\mathbb{N}}^{\alpha_1}$, $x_2 \in H_{\mathbb{N}}^{\alpha_2}$ маємо співвідношення

$$d_{H_{\mathbb{R}}}(x_1, x_2) = \infty. \tag{2}$$

Розглянемо деяку точку y розширеного простору Хеммінга $H_{\mathbb{R}}$. Припустимо, що y належить підпростору $H_{\mathbb{N}}^{\alpha_1}$, і нехай образ цієї точки $f(y)$ належить $H_{\mathbb{N}}^{\alpha_2}$. Тоді з (2) випливає, що для довільної точки $z \in H_{\mathbb{N}}^{\alpha_1}$ її образ $f(z)$ також належить підпростору $H_{\mathbb{N}}^{\alpha_2}$. Це означає, що ізометрія f переставляє підпростори $H_{\mathbb{N}}^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, причому може їх переставляти довільним чином. Крім того, на кожному підпросторі f діє ізометрично. З леми 1 отримуємо, що на кожному з підпросторів $H_{\mathbb{N}}^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, f діє як елемент обмеженого вінцевого добутку $S_{\infty} \overline{\wr}\, C_2$. Таким чином, ізометрії f можна поставити у відповідність таблицю $[g, h(x)]$, де $g \in S_{\mathbb{R}}$, $h(x) \in S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2^{\mathbb{R}}$, тобто f є елементом вінцевого добутку $S_{\mathbb{R}} \wr (S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, C_2)$. Теорему доведено.

Розширений метричний простір (X, d) називається однорідним, якщо група ізометрій $\operatorname{Isom} X$ діє на ньому транзитивно.

Наслідок 1. *Розширений простір Хеммінга $H_{\mathbb{R}}$ є однорідним простором.*

4. Поряд з метричними просторами Хеммінга скінченних $(0,1)$-послідовностей розглядаються більш загальні конструкції, які часто називають узагальненими просторами Хеммінга. А саме, нехай $B = \{b_1, \ldots, b_q\}$ — деякий алфавіт. Узагальненим простором Хеммінга $H_n(q)$ називається метричний простір, визначений на множині всіх послідовностей довжини n над алфавітом B, а відстань між двома такими послідовностями визначається, як і у формулі (1), як кількість їх попарно різних координат (див., наприклад, [2]). Група ізометрій узагальненого простору Хеммінга $H_n(q)$ також добре відома, вона ізоморфна вінцевому добутку $S_n \wr S_q$ симетричної групи S_n степеня n і симетричної групи S_q степеня q.

Розглянемо розширений узагальнений простір Хеммінга $H_{\mathbb{R}}(q)$. Для цього на множині всіх нескінченних послідовностей

$$H_{\mathbb{R}}(q) = \{\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in B\}$$

введемо розширену метрику $d_{q,H_{\mathbb{R}}}$. Відстань $d_{q,H_{\mathbb{R}}}(\overline{x}, \overline{y})$ між довільними послідовностями $\overline{x}$, $\overline{y} \in H_{\mathbb{R}}(q)$ визначимо як число попарно різних координат у тому разі, коли таких координат скінченна кількість, та покладемо рівною ∞, якщо таких координат нескінченно багато. За розширеним метричним простором також можна визначити відповідний граф — узагальнений нескінченновимірний гіперкуб, множина вершин якого є множиною точок $H_{\mathbb{R}}(q)$, і дві послідовності $\overline{x}$, $\overline{y} \in H_{\mathbb{R}}(q)$ з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли $d_{q,H_{\mathbb{R}}}(\overline{x}, \overline{y}) = 1$, тобто вони відрізняються однією координатою. Так визначений граф також незв'язний і має ізоморфні компоненти зв'язності. Зауважимо, що як і для скінченних просторів Хеммінга, графова метрика, визначена на узагальненому нескінченновимірному гіперкубі, буде збігатися з розширеною метрикою Хеммінга.

Охарактеризуємо групу ізометрій введеного нами простору або, що те саме, групу автоморфізмів узагальненого нескінченновимірного гіперкуба.

Теорема 2. *Для довільного натурального $q \geqslant 2$ група ізометрій розширеного узагальненого простору Хеммінга $H_{\mathbb{R}}(q)$ ізоморфна вінцевому добутку $S_{\mathbb{R}} \wr (S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, S_q)$.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1. Враховуючи властивості дії вінцевого добутку $S_{\mathbb{R}} \wr (S_{\mathbb{N}} \overline{\wr}\, S_q)$ на $H_{\mathbb{R}}(q)$, з цієї теореми дістаємо

Наслідок 2. *Розширений узагальнений простір Хеммінга $H_{\mathbb{R}}(q)$ є однорідним простором.*

Роботу частково підтримано Державним агентством з питань науки, інновацій та інформатизації України (№ ДР 0112U005849).

1. *Олійник Б. В.* Універсальність зліченних просторів Хеммінга щодо ізоморфних занурень // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 1996. – Вип. 2. – С. 53–62.
2. *Cameron P. J., Tarzi S.* Limits of cubes // Topol. and its Appl. – 2008. – **155**. – P. 1454–1461.
3. *Blanchard F., Formenti E., Kurka P.* Cellular automata in Cantor, Besicovitch and Weil topological spaces // Complex Systems. – 1997. – **11**. – P. 107–123.
4. *Вершик А. М.* Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. – 1994. – **6**, № 4. – С. 1–68.
5. *Олийнык Б. В., Сущанский В. И.* Группы изометрий пространств Хемминга периодических последовательностей // Сиб. мат. журн. – 2013. – **54**, № 1. – С. 163–179.
6. *Deza M. M., Deza E.* Encyclopedia of distances. – Berlin: Springer, 2009. – 590 p.
7. *Pankov M.* A Note on automorphisms of the infinite-dimensional hypercube graph // Electron. J. Combinatorics. – 2012. – **19**. – P. 23.
8. *Kaluzhnin L. A., Beletskij P. M., Fejnberg V. Z.* Kranzprodukte. – Leipzig: Teubner, 1987. – 167 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 02.04.2013

Б. В. Олийнык

Группы изометрий расширенного пространства Хемминга и бесконечномерного гиперкуба

Введена в рассмотрение конструкция расширенного пространства Хемминга — пространства бесконечных последовательностей над некоторым конечным алфавитом, расстояние между двумя последовательностями в котором определяется как количество различных координат (в случае, когда оно конечно) и равно ∞, если таких координат бесконечное количество. Введенному пространству взаимно однозначно соответствует несвязный граф — бесконечномерный гиперкуб. Приведено полное описание группы изометрий расширенного пространства Хемминга в терминах сплетений, а следовательно, и группы автоморфизмов бесконечномерного гиперкуба.

B. V. Oliynyk

Isometry groups of an extended Hamming space and an infinite-dimensional hypercube

The construction of an extended Hamming space defined on the infinite sequences over some finite alphabet is considered. The distance between such sequences is the number of different coordinates in the case where this number is finite or ∞ otherwise. This space corresponds to a disconnected graph called the infinite-dimensional hypercube. The isometry group of the extended Hamming space is completely described. As a corollary, the automorphism group of the infinite-dimensional hypercube is calculated.