УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, М. М. Семко

Групи, у яких нормальні замкнення циклічних підгруп мають обмежені скінченні ранги Хірша–Зайцева

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Вивчаються узагальнено розв'язні групи з обмеженнями на нормальні замкнення циклічних підгруп. Вважаємо, що група G має скінченний ранг Хірша–Зайцева, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого або нескінченні циклічні, або періодичні, та кількість нескінченних циклічних факторів є скінченною. Неважко побачити, що кількість нескінченних циклічних факторів у кожному з таких рядів є інваріантом групи. Цей інваріант називатимемо рангом Хірша–Зайцева групи G та позначаємо через $r_{\mathrm{hz}}(G)$. Досліджуються групи, у яких нормальне замкнення кожної циклічної підгрупи має ранг Хірша–Зайцева, що не перевищує b (b — деяке натуральне число). При деяких природних обмеженнях знайдена така функція $\kappa_1(b)$, що $r_{\mathrm{hz}}([G/\operatorname{Tor}(G),\, G/\operatorname{Tor}(G)]) \leqslant \kappa_1(b)$.

Якщо G — група та x — її елемент, то *клас спряженості елемента x в G* позначатимемо через x^G, тобто $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$. Групи з різноманітними обмеженнями на класи спряжених елементів вивчаються вже досить давно. Перше обмеження, яке тут виникає, — це обмеження на порядок класу спряжених елементів. Наприклад, якщо $|x^G| = 1$ для кожного елемента $x \in G$, то група G буде абелевою. Це показує, що групи, у яких порядки класів спряжених елементів скінченні та обмежені (тобто існує таке натуральне число b, що $|x^G| \leqslant b$ для кожного $x \in G$), мусять бути досить близькими до абелевих. Групи з такою властивістю називаються *BFC-групами*. Б. Нейман довів [1], що комутатор кожної *BFC*-групи є скінченним. Більш того, існує така функція ν, що $|[G, G]| \leqslant \nu(b)$. Природно, що знайти значення такої функції значно важче, ніж довести її існування. Знаходженню найкращого наближення для функції $\nu(b)$ присвячено велику серію статей. Останньою в цій серії була стаття Р. Гуральника і А. Мароті [2], які довели, що $\nu(b) = (7 + \log_2 b)/2$.

Наведений вище результат Б. Неймана став вихідним пунктом для багатьох цікавих узагальнень. Якщо x^G є скінченним, то або $\langle x\rangle^G$ є скінченним, або $\langle x\rangle^G$ містить у собі таку скінченну нормальну підгрупу T_x, що фактор $\langle x\rangle^G/T_x$ — скінченно породжена вільна абелева група. Зокрема, $\langle x\rangle^G$ є майже поліциклічною. Тому природно виникає питання про структуру груп, у яких нормальне замкнення $\langle x\rangle^G$ буде майже поліциклічною підгрупою. Якщо припустити, що $\langle x\rangle^G$ є нескінченною циклічною для кожного элемента $x \in G$, то неважко показати, що група G є абелевою. Якщо припустити, що $\langle x\rangle^G$ нециклічна, але вільна абелева, то комутант групи вже може і не бути вільною абелевою підгрупою. Покажемо це на такому прикладі. Нехай $D_n = (\langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle) \leftthreetimes \langle c_n\rangle$, де a_n, b_n, c_n мають нескінченні порядки та $c_n^{-1} b_n c_n = a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $K = Dr_{n\in\mathbb{N}} D_n$, $H = \langle a_n a_{n+1}^{-2} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ та нехай $G = K/H$. Неважко упевнитись у тому, що $\langle x\rangle^G$ — це вільна абелева підгрупа, яка має 0-ранг, що не перевищує 2, але $[G, G] \cong Q_2$, зокрема, комутант не може бути вільною абелевою підгрупою.

Нагадаємо деякі поняття. Будь-яка майже поліциклічна група G має скінченний субнормальний ряд

$$\langle 1\rangle = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

фактори G_j/G_{j-1}, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, якого є нескінченними циклічними, а останній фактор G_n/G_{n-1} є скінченним. Число нескінченних циклічних факторів цього ряду є інваріантом групи G, який називається *числом Хірша* групи G.

А. І. Мальцев [3] ввів до розгляду нижчеподаний клас груп. Але спочатку введемо деякі позначення. Якщо G — група, то через $\mathrm{Tor}(G)$ позначатимемо максимальну нормальну періодичну підгрупу G. Зазначимо, що якщо група G є локально нільпотентною, то $\mathrm{Tor}(G)$ є її характеристичною підгрупою, більш того, фактор-група $G/\mathrm{Tor}(G)$ уже не має скруту.

Нехай G — абелева група, що не має скруту. Число елементів у максимальній незалежній підмножині G називається 0-*рангом* G та позначатиметься $r_0(G)$. Якщо ж G — довільна абелева група, то покладемо $r_0(G) = r_0(G/\mathrm{Tor}(G))$.

Будемо говорити, що G — *розв'язна* A_1-*група*, якщо G має скінченний субнормальний ряд, фактори якого є абелевими групами скінченного 0-рангу. Неважко побачити, що якщо G — розв'язна A_1-група, то G має скінченний субнормальний ряд, фактори якого є або нескінченними циклічними, або періодичними групами, причому кількість нескінченних циклічних факторів є інваріантом G. У випадку поліраціональної групи цей інваріант був названий раціональним рангом [4]. Це поняття було розширено на клас локально майже поліциклічних груп [5], а в работі [6] цей інваріант вже розглядався для довільних груп. Він був названий *рангом без скруту*, або 0-рангом. Але термін ранг без скруту не можна вважати досить точним. Наприклад, не кожна група без скруту має ранг без скруту (скінченний або нескінченний). Для неабелевих груп існує поняття секційного 0-рангу, який також позначається через $r_0(G)$. Тому краще буде використовувати інший термін. Більш того, розглянемо таке узагальнення.

Будемо говорити, що група G має *скінченний ранг Хірша–Зайцева*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого або є нескінченними циклічними, або періодичними групами, та кількість нескінченних циклічних факторів є скінченною. Неважко побачити, що кількість нескінченних циклічних факторів у кожному такому ряді є інваріантом групи G. Цей інваріант називається *рангом Хірша–Зайцева* групи G і позначатиметься через $r_{\mathrm{hz}}(G)$.

Нагадаємо, наслідуючи А. І. Мальцева [7], що група G має *скінченний спеціальний ранг* r, якщо кожна скінченно породжена підгрупа G може бути породжена r елементами, та r — це найменше натуральне число, що має таку властивість.

Проілюструємо зв'язки, що існують між групами скінченного рангу Хірша–Зайцева та групами скінченного спеціального рангу.

Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого є локально нільпотентними або локально скінченними. Узагальнено радикальна група G має зростаючу локально нільпотентну або зростаючу локально скінченну підгрупу. У першому випадку її локально нільпотентний радикал $\mathrm{Lnr}(G)$ є неодинчним. У другому випадку неважко побачити, що G містить у собі неодиничну нормальну локально скінченну підгрупу. Неважко показати, що у кожній групі G підгрупа $\mathrm{Lfr}(G)$, породжена усіма її нормальними локально скінченними підгрупами, буде найбільшою її нормальною локально скінченною підгрупою, її називають *локально скінченним радикалом* G. Таким чином, кожна узагальнено радикальна група має зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними або локально скінченними факторами.

Зазначимо також, що періодична узагальнено радикальна група є локально скінченною, а тому і періодична локально узагальнено радикальна група також є локально скінченною.

Якщо G — група скінченного рангу Хірша–Зайцева, то $r_{\mathrm{hz}}(\mathrm{Tor}(G)) = 0$ і $r_{\mathrm{hz}}(G) = r_{\mathrm{hz}}(G/\mathrm{Tor}(G))$. Інакше кажучи, ми можемо говорити тільки про структуру фактор-групи $G/\mathrm{Tor}(G)$. Локально узагальнено радикальні групи скінченного рангу Хірша–Зайцева мають таку структуру [8].

Нехай G — локально узагальнено радикальна група скінченного рангу Хірша–Зайцева та припустимо, що $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1\rangle$. Тоді G є майже розв'язною та містить такі нормальні підгрупи $L \leqslant K \leqslant S \leqslant G$, що:

(i) L є нільпотентною підгрупою без скруту;

(ii) K/L — скінченно породжена абелева група без скруту;

(iii) G/K є скінченною, а S/K — розв'язний радикал G/K.

Більш того, якщо $r_{\mathrm{hz}}(G) = r$, то існують такі функції f_1, f_2, що $|G/K| \leqslant f_1(r)$ та $\mathrm{scl}(S/T) \leqslant f_2(r)$.

Якщо G — розв'язна група, то через $\mathrm{scl}(G)$ будемо позначати її клас розв'язності.

Якщо n — натуральне число, то нехай

$$a(n) = \max\{|\mathrm{Aut}(G)| \mid G \text{ — скінченна група, що має порядок, який не перевищує } n\}.$$

Очевидно $a(n) \leqslant n!$.

Нехай A — підгрупа прямого добутку $A_1 \times \cdots \times A_n$, де $A_j \cong Q$, $1 \leqslant j \leqslant n$, і T — періодична група автоморфізмів A. Тоді T буде скінченною (див., наприклад, [9, теорема 9.33]). Більш того, існує така функция τ, що $|T| \leqslant \tau(n)$.

Відзначимо, що $f_1(r) = ((a(r)r^{2r+2})^r \cdot a(\tau(r))^r)!$.

За класичною теоремою Цассенхауза (див., наприклад, [9, теорема 3.7]) існує така функція ζ, що $\mathrm{scl}(G) \leqslant \zeta(r)$ для кожної розв'язної підгрупи G із загальної лінійної групи $GL_r(F)$.

Будемо мати $f_2(r) = r + \zeta(r)$.

Можемо бачити, що структура G істотно визначається заданням числа r.

Наведений вище результат показує, що якщо G — локально узагальнено радикальна група скінченного рангу Хірша–Зайцева та $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, то G має скінченний спеціальний ранг. Зазначимо також, що у випадку, коли G є локально узагальнено радикальною групою скінченного спеціального рангу, то $G/\mathrm{Tor}(G)$ має скінченний ранг Хірша–Зайцева.

У статтях [10, 11] були розглянуті групи, у яких нормальне замкнення кожної циклічної підгрупи має скінченний спеціальний ранг, який не перевищує деякого натурального числа b. Було доведено, що комутант таких груп має скінченний спеціальний ранг. Нехай тепер G — локально узагальнено радикальна група та припустимо, що існує таке натуральне число b, що $r_{\mathrm{hz}}(\langle x\rangle^G) \leqslant b$ для кожного елемента $x \in G$. Якщо використати наведений вище результат Х. Сміта та взаємні зв'язки, що існують між спеціальним рангом та рангом Хірша–Зайцева, то можна отримати, що комутант фактор-групи $G/\mathrm{Tor}(G)$ має скінченний ранг Хірша–Зайцева. Але Х. Сміт не отримав функцію, що обмежує спеціальний ранг комутанта. Тому метою даної роботи і є отримання функції від b, яка обмежує ранг Хірша–Зайцева комутанта $[G/\mathrm{Tor}(G), G/\mathrm{Tor}(G)]$. Основний результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група, у якій нормальне замкнення кожної циклічної підгрупи має скінченний ранг Хірша–Зайцева, який не перевищує натурального числа b. Якщо $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, то G містить у собі таку нормальну підгру-*

пу K скінченного рангу Хірша–Зайцева, що G/K є вільною від скруту абелевою групою. Більш того, існує така функція κ_1, що $r_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \kappa_1(b)$.

Для функції κ_1 отримано такий вираз:

$$\kappa_1(b) = 3b^2 + \frac{2b(b+1)(b+2)(b^{b-1}-1)}{3(b-1)} + b\tau(b^2) + b^3 + b\tau(b\nu(b\tau(b)) + b^2\nu(b\tau(b)) +$$
$$+ b^2\tau\frac{b(b+1)(b+2)(b^{b-1}-1)}{3(b-1)} + b^2\frac{b^2 + b(b+1)(b+2)(b^{b-1}-1)}{3(b-1)} + b\nu(b\tau(b)),$$

яка обмежує ранг Хірша–Зайцева комутанта $[G/\operatorname{Tor}(G),\ G/\operatorname{Tor}(G)]$.

1. *Neumann B. H.* Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Soc. – 1954. – **29**. – P. 236–248.
2. *Guralnick R. M., Maroti A.* Average dimension of fixed point spaces with applications // Adv. Math. – 2001. – **226**. – P. 298–308.
3. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 3. – С. 567–588.
4. *Зайцев Д. И.* О разрешимых группах конечного ранга // Группы с ограничениями на подгруппы. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 115–130.
5. *Зайцев Д. И.* Группы с дополняемыми нормальными подгруппами // Некоторые проблемы теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 30–74.
6. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. – 1980. – **19**, № 2. – С. 94–106.
7. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – **22**, № 2. – С. 351–352.
8. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Polyakov N. V.* On some ranks of infinite groups // Ric. Mat. – 2007. – **56**, No 1. – P. 43–59.
9. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1973. – 229 p.
10. *Smith H.* A finiteness condition on normal closures of cyclic subgroups // Math. Proc. Royal Irish Academy. – 1999. – **99A**. – P. 179–183.
11. *Longobardi P., Maj M., Smith H.* Groups in which normal closures of elements have boundedly finite rank // Glasgow Math. J. – 2009. – **51**. – P. 341–345.

Дніпропетровський національний університет
Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 21.11.2011

Л. А. Курдаченко, Н. Н. Семко

Группы, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют ограниченные конечные ранги Хирша–Зайцева

Изучаются обобщенно разрешимые группы с ограничениями на нормальные замыкания циклических подгрупп. Полагаем, что группа G имеет конечный ранг Хирша–Зайцева, если G имеет восходящий ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические, и число бесконечных циклических факторов конечно. Нетрудно усмотреть, что число бесконечных циклических факторов в каждом из таких рядов является инвариантом группы. Этот инвариант называем рангом Хирша–Зайцева группы G и обозначаем через $r_{\mathrm{hz}}(G)$. Рассматриваются группы, в которых нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева, не превосходящий b (b — некоторое натуральное число). При наличии некоторых естественных ограничений найдена такая функция $\kappa_1(b)$, что $r_{\mathrm{hz}}([G/\operatorname{Tor}(G),\ G/\operatorname{Tor}(G)]) \leqslant \kappa_1(b)$.

L. A. Kurdachenko, M. M. Semko

Groups in which the normal closures of cyclic subgroups have bounded finite Hirsch–Zaitsev rank

We study the generalized soluble groups with restriction on normal closures of cyclic subgroups. A group G is said to have finite Hirsch–Zaitsev rank if G has an ascending series, whose factors are either infinite cyclic or periodic, and if the number of infinite cyclic factors is finite. It is not hard to see that the number of infinite cyclic factors in every of such series is an invariant of the group G. This invariant is called the Hirsch–Zaitsev rank of G and is denoted by $r_{\mathrm{hz}}(G)$. We study the groups, in which the normal closure of every cyclic subgroup has the Hirsch–Zaitsev rank of at most b (b is some positive integer). For some natural restriction, we find the function $\kappa_1(b)$ such that $r_{\mathrm{hz}}([G/\operatorname{Tor}(G),\ G/\operatorname{Tor}(G)]) \leqslant \kappa_1(b)$.

УДК 517.9

О. О. Покутний

Про розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі оператора в просторах Банаха та Фреше

(Представлено членом-кореспондентом НАН України О. А. Бойчуком)

Узагальнено метод рядів Неймана на випадок операторів, що не обов'язково є стискуючими. Знято умову замкненості множини значень оператора, що розглядається.

Розглянемо рівняння

$$(I - A)x = y, \tag{1}$$

де $A\colon B \to B$ — лінійний обмежений оператор, B — простір Банаха з нормою $\|\cdot\|$ (або Фреше зі зліченним набором напівнорм $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$) такий, що існує стала $c > 0$: $\|A^n\| \leqslant c$, $n \in \mathbb{N}$ (для будь-якої напівнорми $\|\cdot\|_m$ існує напівнорма $\|\cdot\|_k$ така, що $\|A^n x\|_m \leqslant c\|x\|_k$), $\overline{0} \in B$. Для спрощення викладення розглядатимемо випадок, коли B — рефлексивний банахів простір. Про можливе узагальнення на випадок більш загальних топологічних векторних просторів та послаблення умови рівномірної обмеженості степенів оператора A буде викладено в п. 2 роботи. Основною метою даної роботи є встановлення того факту, що рівняння (1) можна зробити завжди розв'язним у певному сенсі (але не обов'язково однозначно розв'язним). У тому випадку, коли рівняння (1) має розв'язки в класичному та сильному узагальненому сенсах їх можна подати у вигляді рівномірно збіжних рядів або збіжних до них послідовностей. Завдяки процесові поповнення [1] вдається відмовитися від умови замкненості підпростору $R(I - A)$, де через $R(I - A)$ позначено множину значень оператора $I - A$. Через $N(I - A)$ позначатимемо ядро оператора $I - A$.

1. Основний результат. Перейдемо до вивчення рівняння (1) в рефлексивному банаховому просторі. Найцікавішим випадком для рівняння (1) є так званий критичний випадок, коли $\mu = 1$ — точка спектра оператора A (оператор $\mu I - A$ не має оберненого). Виявляється, що в цьому випадку вихідне рівняння буде розв'язним не при всіх правих частинах, а його розв'язок може бути не єдиним (можлива навіть нескінченна кількість розв'язків у такого рівняння).

З умови рівномірної обмеженості степенів оператора A випливає [2], що виконується такий розклад простору B у пряму суму:

$$B = N(I - A) \oplus \overline{R(I - A)}. \tag{2}$$

У праці [3] введено поняття відносного спектра оператора й серед іншого для випадку матриць й операторів [3] доведено низку тверджень стосовно узагальненого обертання оператора $I - A$. Переформулюємо деякі з отриманих результатів у вигляді теореми, яку потім буде зручно використовувати для дослідження розв'язності рівняння (1). Для цього введемо позначення для усередненого оператора й нагадаємо його властивості

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k}{n}, \qquad A_0A = AA_0 = A_0^2 = A_0, \qquad N(A_0) = \overline{R(I-A)}.$$

Теорема 1. *Нехай* $R(I-A) = \overline{R(I-A)}$ *й степені оператора* A *є рівномірно обмеженими. Тоді:*

a) $\mu = 1 \in \rho_{NS}(A)$ *(відносно регулярна точка);*

b) оператор $I - A + A_0$ *є оборотним, а оператор* $I - A$ *є узагальнено-оборотним й* $(I-A)^- = (I - A + A_0)^{-1} - A_0$*;*

c) рівняння (1) *розв'язне для тих й тільки тих* y*, які задовольняють умову*

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{3}$$

d) якщо умова (3) *виконана, то множина розв'язків рівняння* (1) *матиме вигляд*

$$x = A_0 c + G[y], \qquad \forall\, c \in B, \tag{4}$$

де

$$G[y] = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (A - A_0)^l \right\}^{k+1} y - A_0 y \quad - \tag{5}$$

узагальнений оператор Гріна, для будь-якого $0 < \mu - 1 < 1/\|R_\mu(A)\|$.

Дослідимо тепер операторне рівняння (1) в загальному випадку (без умови замкненості). Покажемо, що його завжди можна зробити розв'язним в певному сенсі.

1. Класичні розв'язки. Припустимо, що множина значень оператора $I - A$ замкнена, тобто $R(I - A) = \overline{R(I-A)}$. Тоді справджується теорема 1 й умова $y \in R(I - A)$ рівносильна (3) $A_0 y = \overline{0}$. При виконанні цієї умови множина розв'язків рівняння (1) матиме вигляд (4).

2. Сильні узагальнені розв'язки. Розглянемо випадок, коли $R(I - A) \neq \overline{R(I-A)}$. Нехай $y \in \overline{R(I-A)}$. Ця умова в даному випадку також рівносильна умові $A_0 y = \overline{0}$ [2]. Оскільки ядро $N(I - A)$ оператора $I - A$ є доповнювальним підпростором у B (це випливає з розкладу в пряму суму (2)), то можна розглянути фактор-простір по ядру оператора $I - A$. Профакторизуємо простір B по ядру $N(I - A)$ й позначимо відповідний фактор-простір через $E = B/N(I - A)$. Нехай $\mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}}$, $\mathcal{P}_{N(I-A)}$ — проектори на підпростори $\overline{R(I-A)} \subset B$ та $N(I - A)$ відповідно. Тоді профакторизований оператор

$$\mathcal{I} - \mathcal{A} = \mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}} (I - A) j^{-1} \colon E \to R(I - A) \subset \overline{R(I-A)}$$

буде лінійним, неперервним та ін'єктивним. Тут $j\colon B \to E$ — канонічна проекція [4]. Трійка (B, E, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $B_1 = \mathcal{P}_{N(I-A)} B$. Це дає можливість ввести поняття сильного узагальненого розв'язку [1, с. 26, 29] для рівняння

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x} = y, \qquad \overline{x} \in E. \tag{6}$$

Використаємо тепер процес поповнення за нормою $\|\overline{x}\|_{\overline{E}} = \|(\mathcal{I}-\mathcal{A})\overline{x}\|_F$, де $F = \overline{R(I-A)}$ [1]. Тоді отриманий розширений оператор $\overline{(\mathcal{I}-\mathcal{A})}\colon \overline{E} \to \overline{R(I-A)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{E}$ й $\overline{R(I-A)}$. З урахуванням конструкції сильного узагальненого розв'язку [1] рівняння

$$\overline{(\mathcal{I}-\mathcal{A})}\overline{x} = y$$

матиме єдиний узагальнений розв'язок $\overline{(\mathcal{I}-\mathcal{A})}^{-1}y$, який позначатимемо через $\widetilde{c} \in \overline{E}$, й простір E буде щільно вкладеним в $\overline{E}$. Внаслідок щільності вкладення існує послідовність $\widetilde{c}_n \in E$ класів еквівалентності, яка буде збігатися до $\widetilde{c}$ за нормою $\overline{E}$. Обираючи по представнику з кожного класу $c_n \in \widetilde{c}_n$, отримаємо, що вона збігається до узагальненого розв'язку $\widetilde{c}$. Така послідовність буде сильним майже розв'язком [1]. Усі сильні майже розв'язки операторного рівняння (1) можна записати у вигляді $\{c_n + \mathcal{P}_{N(I-A)}c\}_{n\in\mathbb{N}}$, для будь-якого $c \in B$ або, що те саме, $\{c_n + A_0c\}_{n\in\mathbb{N}}$. Якщо $y \in \overline{R(I-A)}$, то існує послідовність $y_n \in R(I-A)$, що до неї збігається. Тоді $G[y_n]$ буде збігатися до $G[y]$ і як c_n можна обрати $G[y_n]$. Таким чином, і узагальнений оператор Гріна $G[y]$ можна розширити до $\overline{G}[y]$. Відзначимо, що якщо $y \in R(I-A)$, то сильні узагальнені розв'язки будуть класичними.

3. Сильні псевдорозв'язки. Розглянемо елемент $y \notin \overline{R(I-A)}$. Ця умова рівносильна тому, що $A_0y \neq \overline{0}$. У цьому випадку рівняння (1) не має ані класичних, ані сильних узагальнених розв'язків, але існують елементи з $\overline{B} = N(I-A) \oplus \overline{X}$, що мінімізують норму відповідної нев'язки $\|\overline{(I-A)}c - g\|_{\overline{B}}$ (простір $\overline{X}$ ізометрично ізоморфний простору $\overline{E}$, а оператор $\overline{I-A}$ є відповідним розширенням оператора $I-A$). А саме [5]:

$$c = (\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}y + A_0\overline{c}, \qquad \forall \overline{c} \in B.$$

Ці елементи й будемо називати псевдорозв'язками.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 2. *Нехай в рівнянні* (1) *лійнійний обмежений оператор A, що діє в рефлексивному просторі Банаха або Фреше, такий, що його степені рівномірно обмежені. Тоді:*

(а) рівняння (1) *має класичні або сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова* (3) — $A_0y = \overline{0}$*; якщо $y \in R(I-A)$, то розв'язки рівняння* (1) *будуть класичними;*

(б) якщо умова (3) *виконується, то множину розв'язків рівняння* (1) *можна зобразити у вигляді операторного ряду*

$$x = A_0c + \overline{G}[y],$$

де $\overline{G}[y]$ — відповідне розширення (5)*;*

(в) якщо умова (3) *не виконується, то рівняння* (1) *має множину псевдорозв'язків, яку можна подати у вигляді*

$$x = A_0c + G[y],$$

де $G[y] = (\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}y$.

Зауваження. Якщо $\|A\| < 1$, то оператор $A_0 = \overline{0}$, у формулі (5) можна зробити граничний перехід, коли $\mu \to 1$, й отримаємо ряд Неймана. У цьому випадку буде існувати єдиний класичний розв'язок. Таким чином, отримані результати узгоджуються з існуючими.

2. Зауваження щодо посилення результатів. Наведемо відому теорему [6], з якої буде видно яким чином можна узагальнити отримані в попередньому пункті результати.

Теорема [6, с. 964]. *Нехай E — віддільний локально опуклий простір, u — його неперервний ендоморфізм і*

$$A_n = \frac{1 + u + u^2 + \cdots + u^n}{n}.$$

Припустимо, що

(a) множина $\{A_n(x)\colon n = 1, 2, \ldots\}$ відносно слабко компактна в E для кожного $x \in E$;

(a′) множина $\{A_n\}$ рівностепенево неперервна;

(b) $\lim\limits_n n^{-1}u^n(x) = 0$ в слабкій топології для кожного $x \in E$.

Тоді:

1) E — топологічна пряма сума підпросторів $N(1-u)$ та $\overline{R(1-u)}$;

2) якщо π — проектування E на $N(1-u)$ паралельно $\overline{R(1-u)}$, то $\lim\limits_n A_n(x) = \pi(x)$ в слабкій топології для кожного $x \in E$.

Нарешті, якщо умова (b) виконана при заміні слабкої топології вихідною, то те саме залишається вірним й для твердження 2.

За цих умов після факторизації за схемою, проведеною вище, та поповнення за топологією індукованою системою напівнорм (детальніше в [1, с. 47, 116]) можна вважати, що оператор $1-u$ має замкнену множину значень. Тоді з розкладу (2) буде випливати, що оператор $1-u$ узагальнено-оборотний з узагальнено-оберненим оператором $(1-u)^{-}$. У цьому випадку множина розв'язків рівняння $(1-u)x = y$ матиме вигляд $x = \pi(c) + (1-u)^{-}y$. У випадку загальних локально опуклих просторів зображення у вигляді збіжного операторного ряду може не бути. Для отримання такого зображення в [3] використовується теорема Банаха про обернений оператор для $(1 - u + \pi)$, яка виконується не завжди. В ультрабочкових, бочкових та просторах Фреше ця теорема виконується і розклад, аналогічний (4), буде справедливим. Якщо простір B буде бочковим, то з умови (a) теореми випливає умова (a') [6, с. 965] й останню можна прибрати. Якщо простір E є простором Фреше або нормованим, u — слабко компактний ендоморфізм, степені якого рівностепенево неперервні, то зі слабкої компактності випливає умова (a), й умова (b) виконується у вихідній топології. Саме такі простори найчастіше й виникають у рівняннях математичної фізики. Якщо E — простір Банаха (або Фреше) й умову (b) замінити умовою $n^{-1}\|u^n\| \to 0$ або більш слабкою умовою $\|u^n\| \leqslant c$ (у просторі Фреше відповідна збіжність буде індукована зліченною системою напівнорм, що породжують топологію простору), то умова (a') буде автоматично виконана. Нарешті в рефлексивних просторах умову (a) можна прибрати. Відзначимо також, що в роботі [7] метод рядів Неймана поширено на випадок правильних операторів за більш сильних умов. Зауважимо також, що якщо оператор у правій частині (1) замінити на довільний обмежений оператор B, що діє з гільбертового простору H_1 в H_2, то можна повністю дослідити розв'язність рівняння (1). А саме, можна довести, що довільний обмежений оператор після процесу поповнення, аналогічного описаному вище, має узагальнений псевдообернений.

1. *Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Обобщенные решения операторных уравнений. – Москва: Диалектика, 2009. – 185 с.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
3. *Biletskyi B. A., Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Periodic problems of difference equations and ergodic theory // Abstract Appl. Anal. – 2011. – Article ID 928587, 12 p.

4. *Атья М.* Лекции по K-теории. – Москва: Мир, 1967. – 261 с.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
6. *Эдвардс Р. Э.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1969. – 1071 с.
7. *Lyashko S. I., Semenov V. V.* On a theorem of M. A. Krasnoselski // Cybern. and System Anal. – 2010. – **46**, No 6. – P. 1021–1025.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 26.06.2012

А. А. Покутный

Про развитие метода рядов Неймана обобщенного обращения на спектре оператора в пространствах Банаха и Фреше

Обобщен метод рядов Неймана на случай нерастягивающих операторов. Снято условие замкнутости множества значений рассматриваемого оператора.

O. O. Pokutnyi

Development of the Neimann's series method of generalized invertibility on the spectrum of an operator in Banach and Fréchet spaces

A generalization of the Neimann's series method to the case of non-contractive operators is presented. The condition of closedness for the set of values of the operator under consideration is removed.

УДК 517.9

С. М. Чуйко

Ускорение сходимости итерационной схемы для нелинейной нетеровой краевой задачи

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Бойчуком)

Для нахождения решений нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае на основе эффективного метода Ньютона–Канторовича построена новая итерационная схема.

Постановка задачи. Для построения решения $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $C[0, \varepsilon_0]$ краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \qquad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \tag{1}$$

традиционно используется метод простых итераций [1, 2]. Достоинство этого метода заключается в простоте и численной устойчивости, однако сходимость итерационной схемы, получаемой по методу простых итераций, является линейной, поэтому естественно возникает задача о построении итерационного процесса, обладающего ускоренной сходимостью. Для решения поставленной задачи используем эффективный метод Ньютона–Канторовича [3, 4]. Решение нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \qquad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot)\colon C[a, b] \to \mathbb{R}^1$. Нелинейности $Z(z, t, \varepsilon)$ и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ задачи (1) дважды непрерывно дифференцируемы по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и непрерывно дифференцируемы по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z, t, \varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a, b]$. Предположим, что для порождающей задачи (2) имеет место критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0; \tag{3}$$

при этом порождающая задача (2) имеет r-параметрическое семейство решений $z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t)$. Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*}\colon R^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица ($X(a) = I_n$) однородной части системы (2), $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}; $(n \times r)$-мерная матрица $X_r(t)$ составлена из r-линейно независимых столбцов матрицы $X(t)$,

$$G[f(s); \alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} + K[f(s)](t) -$$

обобщенный оператор Грина задачи (2), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу,

$$K[f(s)](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s)\, ds \; —$$

оператор Грина задачи Коши для системы (2). Необходимое условие существования решения задачи (1) в критическом случае определяет следующая лемма [1].

Лемма 1. *Пусть краевая задача* (1) *представляет критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие* (3) *разрешимости порождающей задачи* (2). *Предположим также, что задача* (1) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), s, 0)](\cdot)\} = 0. \tag{4}$$

Предположим далее необходимое условие разрешимости задачи (1) выполненным. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (4), ищем решение задачи (1)

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t) c_r^* + G[f(s); \alpha](t).$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = A(t) x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z, t, \varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) =$$
$$= Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t) x(t, \varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

где

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*),\\ \varepsilon = 0}}, \qquad A_2(t) = \left.\frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*),\\ \varepsilon = 0}}.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ и непрерывность по второму аргументу, выделяем линейные по x и по ε части $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ и $\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ этого функционала и член $J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), 0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Обозначим $(d \times r)$-матрицу

$$B_0 = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\};$$

при условии $P_{B_0^*} = 0$ операторная система $x(t,\varepsilon) = \Phi x(t,\varepsilon)$ эквивалентна задаче о построении решения операторного уравнения на множестве функций $x(t,\varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$; здесь

$$\begin{aligned}\Phi x(t,\varepsilon) = &-X_r(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\{\varepsilon\ell_1 G[Z(z_0+x,s,\varepsilon); J(z_0+x,\varepsilon)](\cdot) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \\ &+ J_1(z_0+x,\varepsilon) - \ell K[\varepsilon A_1(s)G[Z(z_0+x,\tau,\varepsilon); J(z_0+x,\varepsilon)](s) + \varepsilon A_2(s) + \\ &+ R_1(z_0+x,s,\varepsilon)](\cdot)\} + \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t) + \\ &+ X_r(t)P_\rho c_\rho.\end{aligned}$$

Оператор $\Phi(Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))$ представляет собой суперпозицию билинейного по $Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ оператора, действующего на непрерывно дифференцируемую по x функцию $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Таким образом, оператор $\Phi x(t,\varepsilon)$ — непрерывный ограниченный оператор, действующий из пространства непрерывных на отрезках $[a,b]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций $x(t,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$ в себя. Производная последнего оператора имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon))}{\partial x} = \\ &= -X_r(t)B_0^+ P_{Q_r^*}\left\{\varepsilon\ell_1 G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot) + \frac{\partial J_1(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x} - \right. \\ &\left. - \ell K\left[\varepsilon A_1(s)G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](s) + \frac{\partial R_1(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot)\right\} + \\ &+ \varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right](t).\end{aligned}$$

Для применения общей схемы метода Ньютона–Канторовича в критическом случае первого порядка введем в рассмотрение оператор

$$\varphi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)) = \Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)) - x(t,\varepsilon).$$

В достаточно малой окрестности порождающего решения

$$\det\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon))}{\partial x} - I_n\right] \neq 0,$$

поскольку при $\varepsilon \to 0$

$$\det\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon))}{\partial x} - I_n\right] \geqslant 1 - \det\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon))}{\partial x}\right] \to 1.$$

Предположим выполненным при достаточно малом $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*]$ условие

$$2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon) < 1.$$

Здесь величины $\gamma_1(\varepsilon)$, $\gamma_2(\varepsilon)$, $\gamma_3(\varepsilon)$ гарантируют выполнение неравенств

$$\left\| \left\{ \frac{\partial \varphi(z_0, \varepsilon)}{\partial z} \right\}^{-1} \right\| \leqslant \gamma_1(\varepsilon), \qquad \|\varphi(z_0, \varepsilon)\| \leqslant \gamma_2(\varepsilon), \qquad \left\| \frac{\partial^2 \varphi(z(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z^2} \right\| \leqslant \gamma_3(\varepsilon).$$

При этом, согласно теореме Канторовича [3, с. 680], приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть краевая задача* (1) *представляет критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие* (3) *разрешимости порождающей задачи* (2). *Тогда для каждого простого* ($P_{B_0^*} = 0$) *корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения* (4) *для порождающих констант задача* (5), (6) *имеет по меньшей мере одно решение* $x(t, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $C[0, \varepsilon_0]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в нулевое* $x(t, 0) \equiv 0$. *Задача* (1) *имеет в этом случае по меньшей мере одно решение:*

$$z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b], \qquad C[0, \varepsilon_0],$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) \equiv z_0(t, c_r^*)$, *которое может быть найдено при помощи сходящегося для* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *итерационного процесса*

$$z_k(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = x_k(t, \varepsilon) - \left[\frac{\partial \Phi(z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon))}{\partial x} - I_n \right]^{-1} [\Phi(z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon)) - x_k(t, \varepsilon)],$$

$$x_0(t, \varepsilon) \equiv 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Приведенная итерационная схема обеспечивает квадратичную сходимость [5] в отличие от полученных нами ранее итерационных процессов [6, 7].

Пример. Покажем, что все требования теоремы выполнены для задачи

$$\frac{dz}{dt} = (2t - 1)z + \varepsilon z \ln z, \qquad \ell z(\cdot) = z(0, \varepsilon) - z(1, \varepsilon) = 0. \tag{7}$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциального уравнения (7) — функция $X(t) = e^{t^2 - t}$; поскольку $Q = \ell X(\cdot) = 0$, постольку имеет место критический случай; при этом $r = d = 1$. Решение порождающей задачи имеет вид $z_0(t, c_r^*) = e^{t^2 - t + 1/6}$. Задача о нахождении периодического решения уравнения (7) представляет критический случай, при этом $B_0 = B_0^{-1} = 1$, следовательно, в данном случае выполнены все условия доказанной теоремы. Для нахождения первого приближения используем оператор

$$\Phi(z_0(t, c_r^*)) = \varepsilon e^{1/6} e^{t^2 - t} \left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right).$$

Производная этого оператора имеет вид

$$\frac{\partial \Phi(z_0(t, c_r^*))}{\partial x} = \varepsilon G[A_1(s); 0](t) + \varepsilon X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K \{A_1(s) G[A_1(\tau); 0](s)\}(\cdot).$$

В отличие от оператора $\Phi(z_0(t, c_r^*))$, значение его производной $\Phi'_x(z_0(t, c_r^*))$ не выражается через элементарные функции. Для вычисления второго слагаемого воспользуемся разложением интеграла $G[A_1(s); 0](t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 1/2$. Таким образом, на первом шаге итерационной схемы находим первое приближение $z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (7); полагая $\varepsilon=0,1$, здесь

$$x_1(t,\varepsilon)=-\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*))}{\partial x}-1\right]^{-1}\cdot\Phi(z_0(t,c_r^*))\approx$$

$$\approx -5{,}31111\cdot 10^{-12}+0{,}018594\cdot t-0{,}0712929\cdot t^2+0{,}105586\cdot t^3-0{,}108013\cdot t^4+$$

$$+0{,}0854975\cdot t^5-0{,}0459865\cdot t^6+0{,}0152232\cdot t^7+0{,}00522619\cdot t^8-0{,}0103855\cdot t^9+$$

$$+0{,}00729421\cdot t^{10}+0{,}000907002\cdot t^{11}-0{,}00980691\cdot t^{12}+0{,}0174217\cdot t^{13}-$$

$$-0{,}0216099\cdot t^{14}+0{,}0213278\cdot t^{15}-0{,}0169551\cdot t^{16}+0{,}0106973\cdot t^{17}-$$

$$-0{,}00516626\cdot t^{18}+0{,}00180097\cdot t^{19}-0{,}000404909\cdot t^{20}+0{,}0000446962\cdot t^{21}.$$

Для нахождения второго приближения воспользуемся неограниченной дифференцируемостью нелинейности $Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ уравнения (7) по неизвестной $z(t,\varepsilon)$ в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ и независимостью этой нелинейности от малого параметра ε. Разлагая нелинейность, вычисляем второе приближение $z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (7); здесь

$$x_2(t;0{,}1)\approx -0{,}0000294344+0{,}019653\cdot t-0{,}0771809\cdot t^2+0{,}122051\cdot t^3-0{,}13815\cdot t^4+$$

$$+0{,}12724\cdot t^5-0{,}0913763\cdot t^6+0{,}0542647\cdot t^7-0{,}0198152\cdot t^8-0{,}00292169\cdot t^9+$$

$$+0{,}0173311\cdot t^{10}-0{,}0258518\cdot t^{11}+0{,}0329137\cdot t^{12}-0{,}0393473\cdot t^{13}+0{,}0431496\cdot t^{14}-$$

$$-0{,}041112\cdot t^{15}+0{,}0325485\cdot t^{16}-0{,}020602\cdot t^{17}+0{,}00998658\cdot t^{18}-$$

$$-0{,}00348343\cdot t^{19}+0{,}000780806\cdot t^{20}-0{,}0000852132\cdot t^{21}.$$

Точность полученных приближений демонстрирует последовательное уменьшение от итерации к итерации норм невязок; действительно, при $\varepsilon=0,1$ имеем

$$\left\|A(t)z_0(t,c_r^*)+\varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0)-\frac{dz_0(t,c_r^*)}{dt}\right\|_{L^2[0;1]}\approx 0{,}0196893;$$

$$\left\|A(t)x_1(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-\frac{dx_1(t,\varepsilon)}{dt}\right\|_{L^2[0;1]}\approx 1{,}23248\cdot 10^{-3};$$

$$\left\|A(t)x_2(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-\frac{dx_2(t,\varepsilon)}{dt}\right\|_{L^2[0;1]}\approx 6{,}28002\cdot 10^{-5}.$$

Проверим далее условие сходимости; для этого согласно теореме Канторовича [3, с. 680, 682] проверим выполнение в достаточно малой окрестности порождающего решения условия $2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon)<1$. Здесь величины $\gamma_1(\varepsilon)$, $\gamma_2(\varepsilon)$, $\gamma_3(\varepsilon)$ гарантируют выполнение неравенств

$$\left\|\left\{\frac{\partial\varphi(z_0,\varepsilon)}{\partial z}\right\}^{-1}\right\|\leqslant\gamma_1(\varepsilon),\qquad \|\varphi(z_0,\varepsilon)\|\leqslant\gamma_2(\varepsilon),\qquad \left\|\frac{\partial^2\varphi(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2}\right\|\leqslant\gamma_3(\varepsilon).$$

При $\varepsilon=0{,}1$ имеем $\gamma_1(\varepsilon)\geqslant(1{,}0589)^{-1}$. Далее

$$\|\varphi(z_0,\varepsilon)\|=\|\Phi(z_0,\varepsilon)\|=\left\|\varepsilon\cdot e^{1/6}\cdot e^{t^2-t}\cdot\left(\frac{t}{6}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\right\|\approx 0{,}00161145,$$

следовательно, $\gamma_2(\varepsilon) \geqslant 0{,}00161145$. Поскольку при $\varepsilon = 0{,}1$

$$\gamma_1(\varepsilon) \approx \max_{[0;1]} |\varphi''(z_0(t, c_r^*) + x_2(t, \varepsilon))| \approx 1{,}25383,$$

постольку

$$2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon) \approx 0{,}00381621 \ll 1,$$

следовательно, при $\varepsilon = 0{,}1$ условие сходимости полученной итерационной схемы выполняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0–1) и Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – Москва: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
5. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 440 с.
6. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. – № 10. – С. 1668–1674.
7. *Чуйко С. М.* Ускорение сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 127–132.

Славянский государственный педагогический университет

Поступило в редакцию 14.06.2012

С. М. Чуйко

Прискорення збіжності ітераційної схеми для нелінійної нетерової крайової задачі

Для знаходження розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку з використанням методу Ньютона–Канторовича побудовано нову ітераційну схему.

S. M. Chuiko

Acceleration of the convergence of an iteration procedure for a nonlinear Noetherian boundary-value problem

The convergent iteration algorithm on the basis of Newton–Kantorovich's method for the construction of the solutions of Noetherian weakly nonlinear boundary-value problem for a system of differential equations is proposed.

ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2013

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 004.414.2;004.942;004.02

Член-кореспондент НАН України **В. В. Грицик, І. Г. Цмоць, В. М. Теслюк**

Методологія системного проектування нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем

Розроблено методологію системного проектування нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем, яка грунтується на інтегральному підході та розроблених принципах побудови таких систем, методах їх проектування та програмно-апаратної реалізації з використанням штучних нейронних мереж і сучасної елементної бази на основі НВІС-структур, що дає змогу підвищити ефективність архітектурних рішень мобільних робототехнічних систем.

Сучасний етап розвитку мобільних робототехнічних систем орієнтований на широке використання нейрокомп'ютерних засобів (НЗ) для оцінювання даних, які надходять від давачів в умовах завад і неповної інформації. Такі нейрокомп'ютерні засоби розробляють на основі паралельних, розподілених та адаптивних технологій обробки даних у реальному часі, які здатні "вчитися" опрацьовувати дані, діючи в інформаційному середовищі. Особливістю НЗ, які використовуються в робототехнічних системах, є здатність синтезувати правила та здійснювати їх модифікацію в процесі функціонування. В мобільних робототехнічних системах (МРС) вимагається опрацювання у реальному часі різних за інтенсивністю надходження потоків даних на апаратних засобах, що задовольняють обмеження щодо габаритів, енергоспоживання, вартості та часу розробки. Розроблення таких засобів вимагає широкого використання сучасної елементної бази (напівзамовних і замовних НВІС) та побудови нових методів, алгоритмів і НВІС-структур для опрацювання та розпізнавання зображень на основі штучних нейронних мереж (ШНМ). Висока продуктивність і ефективність використання обладнання у нейрокомп'ютерних засобах досягається розпаралеленням і конвеєризацією процесів обробки, апаратним відображенням структури алгоритму розв'язання задачі в архітектуру, яка адаптована до інтенсивності надходження потоків даних. Тому актуальною задачею сьогодення є розробка підходів та методів проектування нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем на основі сучасної елементної бази.

Аналіз існуючих досліджень у галузі проектування НЗ мобільних робототехнічних систем [1–3] показує, що вони мають такі недоліки: не враховують вимоги конкретних застосувань щодо апаратних затрат, габаритів і споживаної потужності; методи проектування та синтезу не враховують особливості сучасної елементної бази; методи, алгоритми обробки та структури апаратних засобів не орієнтовані на НВІС-реалізацію та на роботу в режимі реального часу і не забезпечується висока ефективність використання апаратних засобів.

З проведеного аналізу випливає, що для забезпечення режиму реального часу та високої ефективності використання апаратних засобів необхідно використовувати спеціалізацію, конвеєризацію, просторовий паралелізм і узгодження інтенсивності надходження даних з обчислювальною здатністю апаратних засобів. Тому метою дослідження є розробка методів синтезу високоефективних нейрокомп'ютерних засобів робототехнічних систем.

Принципи побудови нейрокомп'ютерних НВІС-систем. Аналіз останніх досліджень в галузі розроблення РС дає змогу сформулювати основні принципи побудови архітектур нейрокомп'ютерних НВІС-систем, які повинні повною мірою використовувати можливості НВІС-технології, враховувати вартість площі кристала, а також кількість вхідних і вихідних виводів. Число зовнішніх виводів НВІС обмежене рівнем технології та розміром кристала. Для забезпечення зменшення вартості, термінів проектування і високої ефективності використання обладнання в основу побудови нейрокомп'ютерних НВІС-систем пропонується покласти такі принципи: модульності, який передбачає розробку компонентів нейрокомп'ютерних систем (НС) у вигляді функціонально завершених пристроїв (модулів); узгодженості інтенсивності надходження даних з обчислювальною здатністю нейрокомп'ютерних систем; конвеєризації та просторового паралелізму обробки даних; однорідності та регулярності архітектури нейрокомп'ютерних систем; локалізації та спрощення зв'язків між елементами нейрокомп'ютерних систем; спеціалізації та адаптації апаратно-програмних засобів до структури алгоритмів обробки та інтенсивності надходження даних; програмованості архітектури шляхом використання репрограмованих ПЛІС.

Вибір варіанта реалізації нейрокомп'ютерних засобів. Виходячи з вимог, які висуваються до нейрокомп'ютерних засобів, наведемо можливі варіанти їх реалізації: на основі універсальних і функціонально-орієнтованих мікропроцесорів шляхом розробки спеціалізованого програмного забезпечення; на основі універсального обчислювального ядра, доповненого НВІС-пристроями, які реалізують часомісткі алгоритми функціонування ШНМ; у вигляді спеціалізованої алгоритмічної НВІС-системи, архітектура якої апаратно відображає структуру алгоритму.

Перший варіант є доступним для широкого кола користувачів. Перевагою цього варіанту є можливість застосування раніше розроблених програм, а його недоліками є невисока швидкодія, функціональна і структурна надлишковість апаратних засобів.

Другий варіант передбачає поєднання універсальних і спеціальних засобів. Таке поєднання забезпечує високу ефективність використання обладнання при опрацюванні у реальному часі потоків даних за алгоритмами, які є нерегулярними з великою кількістю логічних операцій. При цьому розробка нейрокомп'ютерних засобів з заданими технічними параметрами зводиться до доповнення обчислювального ядра додатковими НВІС-пристроями.

Третій варіант орієнтований на обробку у реальному часі інтенсивних потоків даних за складними нейроалгоритмами. Така реалізація нейроалгоритмів характеризуються введенням додаткового обладнання і відсутністю проміжних пересилок інформації в процесі обчислення, а також спрощенням функції місцевого керування.

Другий та третій варіанти є найперспективнішими для реалізації нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем. Дані варіанти передбачають НВІС-реалізацію як базових операцій нейроалгоритмів, так і нейроалгоритмів в цілому.

Для НВІС-реалізацій нейроалгоритми повинні забезпечувати детерміноване переміщення даних, бути добре структурованими та орієнтованими на реалізацію на множині взаємозв'язаних процесорних елементів (ПЕ). Структура та операції, які виконують ПЕ, залежить від вимог, що висуваються до часу обчислення алгоритму. В більшості випадків ПЕ реалізують базові операції нейроалгоритмів, групове підсумовування, обчислення скалярного добутку та передатної функції. При розробці або виборі нейроалгоритмів для НВІС-реалізацій потрібно одночасно враховувати багато взаємопов'язаних факторів.

В першу чергу необхідно, щоб алгоритми були рекурсивними та локально залежними. В рекурсивному алгоритмі всі ПЕ повинні виконувати приблизно однакові операції. При реалізації рекурсивного алгоритму кожний із ПЕ буде повторювати виконання фіксованого набору операцій над послідовністю даних, що надходять. Ефективність відображення алгоритму на ПЕ безпосередньо пов'язана із способом декомпозиції розв'язання задачі перетворення на незалежні базові операції, що виконуються паралельно, або на залежні, що виконуються у конвеєрному режимі. Рекурсивні алгоритми можна розділити на два класи з локальними (обміни здійснюються тільки між найближчими сусідніми ПЕ) та глобальними пересилками даних.

Особливості проектування нейрокомп'ютерних засобів. Проектування нейрокомп'ютерних засобів складається з таких етапів: вибору та розробки методів і алгоритмів функціонування нейрокомп'ютерних засобів; визначення основних параметрів апаратних засобів; переходу від алгоритму до структури апаратних засобів [3].

Розробку нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем доцільно здійснювати на основі компонентно-ієрархічного підходу, який передбачає поділ процесу розробки на ієрархічні рівні та види забезпечення (алгоритмічне, апаратне та програмне). Для реалізації такого підходу використовується метод декомпозиції, який передбачає розбиття засобів на окремі компоненти, з яких синтезуються нейрокомп'ютерні засоби для вимог конкретного застосування. На кожному рівні ієрархії розв'язуються задачі відповідної складності, які характеризуються як одиницями інформації, так і алгоритмами обробки.

За складністю опрацювання даних компоненти нейрокомп'ютерних систем можна розділити на чотири ієрархічні рівні. Збільшенню номера рівня ієрархії відповідає збільшення деталізації алгоритмічних, апаратних і програмних засобів. При цьому на вищих рівнях ієрархії одиниці інформації, алгоритми, програмні та апаратні засоби являють собою впорядковані сукупності одиниць інформації та композиції алгоритмів, програмних і апаратних засобів нижчих рівнів ієрархії (табл. 1).

Методологія послідовної декомпозиції, яка використовується при компонентно-ієрархічному підході до розробки нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем, відображає процес проектування "зверху вниз".

На першому ієрархічному рівні розробляються методи, алгоритми опрацювання даних, структури апаратних та програмних засобів. Здійснюється відображення алгоритму роботи у вигляді функціонального графа $F = (\Phi, \Gamma)$, де $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ — множина функціональних операторів; Γ — закон відображення зв'язків між операторами [5].

Другий рівень ієрархії складають методи, алгоритми та структури підсистеми керування рухом і технічного зору, які реалізуються на базі ШНМ, нейропроцесорів, процесорів обробки сигналів, мікроконтролерів та паралельної пам'яті [2].

Третій ієрархічний рівень складається з методів, алгоритмів та структур компонентів, які реалізують базові макрооперації алгоритмів керування рухом і технічного зору та нейроалгоритмів. Для реалізації елементів третього рівня розробляються паралельні алгоритми, НВІС-структури та програми.

До четвертого рівня ієрархії відносяться елементи, які реалізують операції нейронного елемента, функції активації, радіально-базисної функції, скалярного добутку, групового підсумовування. В функціональному і структурному відношеннях елементи четвертого рівня грунтуються на елементарних арифметичних операціях.

Компонентно-ієрархічний підхід до розробки нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем можна описати за допомогою такого виразу:

$$C^{1}_{\mathrm{MIT}} = \bigcup_{i=1}^{n} C^{2i}_{\mathrm{MIT}} \bigcup_{j=1}^{m} C^{3j}_{\mathrm{MIT}} \bigcup_{p=1}^{h} C^{4p}_{\mathrm{MIT}},$$

де C^{2i}_{MIT}, C^{3j}_{MIT}, C^{4p}_{MIT} — засоби відповідно другого, третього і четвертого ієрархічних рівнів; n — кількість типів підсистем; m — кількість типів компонентів; h — кількість типів операційних пристроїв.

Розробка архітектури нейрокомп'ютерних НВІС-систем. Пропонується розробку архітектури нейрокомп'ютерних НВІС-систем здійснювати на основі інтегрованого підходу, який грунтується на можливостях сучасної елементної бази та охоплює структури, методи, алгоритми функціонування компонентів і нейрокомп'ютерних систем, враховує вимоги конкретних застосувань та інтенсивності надходження даних.

При цьому задача проектування компонентів і нейрокомп'ютерних систем зводиться до формування множин вимог $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$, характеристик $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ і обмежень $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ та знаходження такого вектора $\mathbf{H}^* = [H_1^*, H_2^*, \ldots, H^*{}_m]$,

Таблиця 1. Рівні та види розробок нейрокомп'ютерних засобів

Ієрархічний рівень	Види забезпечення та виконувані розробки		
	Алгоритмічне	Апаратне	Програмне
1-й	Методи та алгоритми функціонування НС	Структура нейрокомп'ютерної системи	Структура програмних засобів НС
2-й	Методи та алгоритми функціонування підсистеми керування рухом та підсистеми технічного зору	Структури ШНМ, нейропроцесорів, процесорів обробки сигналів, мікроконтролерів, паралельної пам'яті	Програми реалізації ШНМ, програм керування рухом, оцінювання даних, компресування та розпізнавання зображень
3-й	Методи та алгоритми реалізації компонентів підсистем керування рухом та технічного зору	Структури базових компонентів підсистем керування рухом та технічного зору нейронних елементів, пристроїв для реалізації макрооперацій нейроалгоритмів	Програми реалізацій шарів ШНМ, налаштування ШНМ, обміну, опитування давачів, макрооперацій нейроалгоритмів
4-й	Методи та алгоритми реалізації нейронного елемента, функції активації, радіально-базисної функції, скалярного добутку, групового підсумовування	Структури нейронного елемента, операційних пристроїв для реалізації радіально-базисної функції, скалярного добутку, групового підсумовування	Програми реалізацій нейронного елемента, радіально-базисної функції, скалярного добутку, групового підсумовування

$H_i^* = f_i(R, H, B)$, $i = 1, \ldots, m$, який забезпечить максимальне значення ефективності використання обладнання $E = \max f(R, H^*, B)$.

Множину вимог $\mathbf{R}$ складає: R_1 — кількість каналів надходження даних m_d; R_2 — розрядність каналів надходження даних n_d; R_3 — частота надходження даних F_d; R_4 — швидкодія елементної бази, яка визначається часом затримки вентиля $t_{\text{в}}$; R_5 — кількість елементів (слів) вхідного масиву N; R_6 — розрядність вхідного слова n. Множину характеристик $\mathbf{H}$ становлять: H_1 — загальна кількість зв'язків Z; H_2 — просторова зв'язкова віддаль Δj; H_3 — конвеєрний такт $t_{\text{к}}$; H_4 — витрати обладнання W; H_5 — кількість типів функціональних вузлів s; H_6 — кількість каналів введення $m_{\text{вв}}$; H_7 — розрядність каналів введення $n_{\text{вв}}$; H_8 — кількість виводів інтерфейсу зв'язку Y. Обмеження $\mathbf{B}$, які необхідно враховувати при проектуванні НВІС-систем реального часу, такі: B_1 — точність обчислення, що визначається розрядністю результату $n_{\text{р}}$; B_2 — час обчислення $T_{\text{обч}}$, повинен бути $T_{\text{обч}} \leqslant T_{\text{обм}}$, де $T_{\text{обч}} = t_{\text{к}} N n / (m_{\text{вв}} n_{\text{вв}})$; $T_{\text{обм}}$ — час обміну, який визначається так: $T_{\text{обм}} = Nn/(F_d m_d n_d)$.

Для вибору варіанта структури нейрокомп'ютерної НІВС-системи застосовується критерій ефективності використання обладнання E, який враховує кількість виводів інтерфейсу, однорідність структури, кількість і локальність зв'язків, зв'язує продуктивність з витратами обладнання та дає оцінку елементам (вентилям) компонента за продуктивністю [2]. Кількісна величина ефективності використання обладнання для такого апаратного засобу визначається таким чином:

$$E = \frac{G m_{\text{к}} n_{\text{к}}}{t_{\text{к}} N n \left(k_1 \sum\limits_{i=1}^{s} W_{\text{ФУ}_i} d_i + k_2 Q + k_3 Y \right)},$$

де G — складність алгоритму опрацювання; $t_{\text{к}}$ — конвеєрний такт; $W_{\text{ФУ}i}$ — витрати обладнання у вентилях на реалізацію i-го функціонального вузла; d_i — кількість функціональних вузлів i-го типу; k_1 — коефіцієнт врахування однорідності $k_1 = f(s)$; k_2 — коефіцієнт врахування регулярності зв'язків $k_2 = f(\Delta j)$; k_3 — коефіцієнт врахування кількості виводів інтерфейсу зв'язку $k_3 = f(Y)$.

Конвеєрний такт $t_{\text{к}}$ визначається за формулою $t_{\text{к}} = \sum\limits_{j}^{l} \max t_{\text{в}}$, де l — кількість послідовно з'єднаних вентилів у найповільнішій сходинці конвеєра, а Δj — як різниця просторових індексів.

До основних параметрів оцінки апаратних засобів реального часу, крім витрат обладнання, швидкодії, ефективності використання обладнання, пропонується використовувати обчислювальну здатність. Для обробки потоків даних у реальному часі доцільно застосовувати синхронні структури з конвеєрною реалізацією графів нейроалгоритмів, в яких здійснюється суміщення у часі виконання функціональних операторів нейроалгоритму над різними даними. Конвеєризація нейрокомп'ютерної системи передбачає розділення її на сходинки шляхом введення буферної пам'яті. При цьому кожна сходинка конвеєра складається з двох компонентів: буферної пам'яті та операційних пристроїв, що реалізують функціональні оператори ярусу. Для забезпечення високої швидкодії та ефективності використання обладнання функціональні оператори, які реалізуються у сходинках конвеєра, мають бути простими та мати приблизно однаковий час реалізації.

Перехід від алгоритму розв'язання задачі до структури нейрокомп'ютерної НВІС-системи, яка працює в реальному часі, формально зводиться до мінімізації витрат обладнання

$W_{\text{НС}} = W_{\text{ІП}} + W_{\text{П}} + W_{\text{ПУ}} + \sum_{i=1}^{k} W_{\text{ПЕ}_i} m_i$, де $W_{\text{НС}}$, $W_{\text{ПУ}}$, $W_{\text{ІП}}$, $W_{\text{П}}$, $W_{\text{ПЕ}}$ — витрати обладнання відповідно на нейрокомп'ютерну систему, пристрої керування, інтерфейсні пристрої, пам'ять; k — кількість типів ПЕ, i-й ПЕ; m_i — кількість ПЕ i-го типу, при забезпеченні такої умови: $Nn/(F_d m_d n_d) \geqslant t_{\text{к}} Nn/(m_{\text{вв}} n_{\text{вв}})$.

Основними шляхами мінімізації апаратних затрат на реалізацію нейрокомп'ютерної НВІС-системи є:

вибір ефективних методів і алгоритмів реалізації функціональних операторів нейроалгоритмів;

зменшення розрядності операційних пристроїв, пам'яті, кількості і розрядності каналів передачі даних;

узгодження інтенсивності надходження даних із обчислювальною здатністю нейрокомп'ютерної НВІС-системи.

На закінчення зробимо такі висновки.

1. Розробку нейрокомп'ютерних засобів мобільних робототехнічних систем доцільно здійснювати на основі інтегрованого підходу, який охоплює сучасну елементну базу, методи та алгоритми реалізації нейроалгоритмів, архітектури компонентів і систем, враховує вимоги конкретних застосувань, інтенсивності надходження даних і ґрунтується на таких принципах побудови: конвеєризації та просторового паралелізму обробки даних; модульності; однорідності та регулярності архітектури; спеціалізації та адаптації апаратно-програмних засобів до структури алгоритмів обробки та інтенсивності надходження даних.

2. Для вибору архітектури нейрокомп'ютерних НВІС-систем запропоновано застосовувати критерій ефективності використання обладнання, який враховує кількість виводів інтерфейсу, однорідність структури, кількість і локальність зв'язків, зв'язує продуктивність з витратами обладнання та дає оцінку елементам системи за продуктивністю.

3. Основними шляхами підвищення ефективності використання обладнання нейрокомп'ютерних НВІС-систем є: вибір ефективних методів і алгоритмів реалізації для НВІС-реалізації; зменшення розрядності операційних пристроїв, пам'яті, кількості і розрядності каналів передачі даних; узгодження інтенсивності надходження даних із обчислювальною здатністю апаратних засобів на всіх рівнях.

4. Визначено, що узгодження інтенсивності надходження даних із обчислювальною здатністю НВІС-систем можна здійснювати так: зміною тривалості конвеєрного такту, кількості і розрядності каналів надходження даних в операційних пристроях.

5. Основними етапами синтезу нейрокомп'ютерних НВІС-систем є: вибір та розробка методів і алгоритмів узгоджено-паралельної обробки; визначення основних параметрів апаратних засобів; перехід від алгоритму до узгодженої паралельної структури.

1. *Резник А. М., Куссуль М. Э., Сычов А. С. и др.* Система автоматизированного проектирования модульных нейронных сетей CAD MNN // Мат. машины и системы. – 2002. – № 3. – С. 28–36.
2. *Подураев Ю. В., Кулешов В. С.* Принципы построения и современные тенденции развития мехатронных систем // Мехатроника. – 2000. – № 1.
3. *Круглов В. В., Борисов В. В.* Искусственные нейронные сети. Теория и практика. – 2-е изд., стереотип. – Москва: Горячая линия-Телеком, 2002. – 382 с.
4. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. – 2-е изд. / Пер. с англ. – Москва: Вильямс, 2006. – 1104 с.
5. *Галушкин А. И.* Нейрокомпьютеры. Кн. 3. – Москва: ИПРЖР, 2000. – 528 с.
6. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации / Пер. с польского. – Москва: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

7. *Палагин А. В., Опанасенко В. Н.* Реконфигурируемые вычислительные системы. – Киев: Просвіта, 2006. – 280 с.
8. *Ткаченко Р. О.* Нова парадигма штучних нейронних мереж прямого поширення // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – 1999. – № 386. – С. 43–54.
9. *Цмоць І. Г.* Інформаційні технології та спеціалізовані засоби обробки сигналів і зображень у реальному часі. – Львів: УАД, 2005. – 227 с.
10. *Грицик В. В., Ткаченко Р. О.* Нові підходи до навчання штучних нейромереж // Доп. НАН України. – 2002. – № 11. – С. 59–65.
11. *Грушицкий Р. И., Мурсаев А. Х., Угрюмов Е. П.* Проектирование систем на микросхемах программируемой логики. – Ст.-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
12. *Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. – Ст.-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
13. *Немнюгин С. А., Стесик О. Л.* Параллельное программирование для многопроцессорных систем. – Ст.-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. – 400 с.
14. *Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – Ст.-Петербург: БХВ – Петербург, 2003. – 1104 с.
15. *Ткаченко Р. О., Ткаченко П. Р., Цмоць І. Г.* Апаратна реалізація багатошарових перцептронів з неітераційним навчанням: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т проблем моделювання в енергетиці НАН України. – 2005. – Вип. 29. – С. 103–113.

Національний університет "Львівська політехніка" *Надійшло до редакції 10.05.2012*

Член-корреспондент НАН Украины **В. В. Грицык, И. Г. Цмоць, В. Н. Теслюк**

Методология системного проектирования нейрокомпьютерных средств мобильных робототехнических систем

Разработана методология системного проектирования нейрокомпьютерных средств мобильных робототехнических систем, которая базируется на интегральном подходе и разработанных принципах построения таких систем, методах их проектирования и программно-аппаратной реализации с использованием искусственных нейронных сетей и современной элементной базы на основании СБИС-структур, что дает возможность повысить эффективность архитектурных решений мобильных робототехнических систем.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Grytsyk, I. G. Tsmots, V. M. Teslyuk**

Methodology of the system design of neuro-computer instruments for mobile robotic systems

A methodology of the system design of neuro-computer instruments for mobile robotic systems is developed. It is based on the integral approach and principles of the design of such systems, methods of their design and their program-practical realization with the use of artificial neuron systems, and modern elements based upon HBIC-structures that enables to increase the efficiency of architectural decisions for mobile robotic systems.

УДК 519.854

В. О. Михайлюк

Поліноміальна порогова реоптимізація задач про узагальнену виконуваність з предикатами обмеженої розмірності

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

При виконанні унікальної ігрової гіпотези (UGC) для розв'язання задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P при додаванні довільного обмеження) при $k = \mathrm{const}$ *існує поліноміальний оптимальний (пороговий)* $\psi(\alpha_Z)$*-наближений алгоритм, де* $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$ *і* α_Z *— цілочисловий розрив напіввизначеної (SDP) релаксації Max-EkCSP-P задачі* Z*.*

У задачах про узагальнену виконуваність (CSP задачах) є множина змінних і множина обмежень (вони задаються предикатами), кожне з яких залежить від деякого числа змінних. Більш формально, CSP задача Q задається множиною предикатів над скінченною областю $[q] = \{1, \ldots, q\}$. Кожен екземпляр цієї задачі складається з множини змінних V і множини обмежень на них. Задача полягає у знаходженні такого приписування значень змінним, які виконують (задовольняють) максимальне число обмежень. У загальному випадку предикати можуть бути замінені дійсними платіжними функціями, і задача полягає в максимізації загального платежу. Велика кількість оптимізаційних задач, таких як Max-Cut і Max-k-Sat, є прикладами CSP задач. Більшість задач про узагальнену виконуваність є NP-складними і їх точне розв'язання за допустимий час навряд чи можливе. Тому розглядаються ефективні наближені алгоритми розв'язання таких задач. Кажуть, що для задачі максимізації алгоритм є C-наближеним, якщо за допомогою нього для довільного екземпляра знаходиться розв'язок із значенням цільової функції, не меншим, ніж $(1/C) \cdot OPT$, де OPT — глобальний оптимум. При цьому C називають відношенням апроксимації.

Вважається, що для задачі Q встановлена верхня оцінка відношення апроксимації C, якщо існує поліноміальний C-наближений алгоритм її розв'язання. Для цієї задачі встановлена нижня оцінка відношення апроксимації c, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ не існує поліноміального наближеного алгоритму її розв'язання, на якому досягається відношення апроксимації $c - \varepsilon$. Якщо $C = c$, то для задачі Q встановлено поріг відношення апроксимації $C = c$. Відповідний алгоритм називається оптимальним, або пороговим.

Задача встановлення нижніх оцінок відношення апроксимації (як і довільна задача отримання нижніх оцінок складності) є дуже важкою. Для неї існує назва неапроксимованість або складність апроксимації. Значний вплив на розвиток методів одержання нижніх оцінок мали відома PCP теорема [1] і дискретний аналіз Фур'є для тестування властивостей задач [2].

Починаючи з роботи [3], що стосується задачі Max-Cut, напіввизначене програмування (SDP) стало основним інструментом у побудові наближених алгоритмів для CSP задач. Для багатьох задач побудовані SDP релаксації і застосовуються відповідні процедури ймовірнісного округлення отриманих розв'язків.

Проблема неапроксимованості була успішно розв'язана для багатьох задач завдяки PCP теоремі. Зокрема, Хастад [5] показав, що Max-E3-Lin-2 і Max-3-Sat є NP-складними для апроксимації з відношеннями $2-\varepsilon$ і $8/7-\varepsilon$ відповідно. Це означає, що найпростіший випадковий алгоритм приписування є найкращим (оптимальним) для цих задач, якщо $P \neq NP$, або що відношення 2 і 8/7 є пороговими. Таким чином, іноді випадковий алгоритм приписування є оптимальним. Задачі (зокрема і предикати), для яких це має місце, називають апроксимаційно-стійкими.

Останнім часом встановлено тісний зв'язок між поняттями апроксимаційне відношення, відношення неапроксимованості та цілочисловий розрив простої SDP релаксації (що визначається як максимальне відношення значення SDP розв'язку до значення оптимуму). Унікальна ігрова гіпотеза (UGC) була введена Кхотом [7] як можливий спосіб одержання нових сильних результатів з неапроксимованості. Її можна сформулювати в термінах унікальної ігрової задачі, UGC є посиленням PCP теореми. Якщо виходити з UGC, отримаємо неапроксимованість, основану на UGC, або умовну неапроксимованість.

З істинності UGC випливає, що проста SDP релаксація дає оптимальне відношення апроксимації для CSP задачі. Вперше зв'язок між схемами округлення для SDP релаксації і результатами з неапроксимованості, що випливають з UGC, було встановлено в [9] для булевих CSP задач від двох змінних.

Поняття реоптимізації [10, 11] полягає в наступному. Нехай Q — деяка NP-складна (можливо NP-повна) задача, I — її початковий екземпляр, оптимальний розв'язок якого відомий. Пропонується новий екземпляр I' задачі Q, отриманий деякими незначними змінами екземпляра I. Мета реоптимізації при використанні наближених методів — застосування знань про розв'язок початкового екземпляра I для досягнення кращої якості наближення (апроксимаційного відношення) екземпляра I'.

У [11] встановлено порогове відношення апроксимації для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) з апроксимаційно-стійкими предикатами P. У даній роботі досліджується відношення апроксимації оптимальних наближених алгоритмів реоптимізації задач про узагальнену виконуваність з предикатами обмеженої розмірності, які не є апроксимаційно-стійкими.

Основні означення і позначення [5, 12]. Під предикатом P розмірності k розумітимемо відображення $P\colon \{-1,1\}^k \to \{0,1\}$. Для зручності позначень вхідні дані зі значенням -1 інтерпретуємо як "істина", зі значенням 1 — як "хибність". Якщо предикат P набуває вхідного значення y, то $P(y)=1$, інакше — $P(y)=0$. Таким чином, множина значень, що приймається предикатом P, позначається як $P^{-1}(1)$. Літерал — це булева змінна або її заперечення.

Означення 1. Нехай $P\colon \{-1,1\}^k \to \{0,1\}$ — предикат. Екземпляр задачі Max-CSP-P складається з m обмежень з вагами, кожне з яких є k-кортеж літералів $(z_{i_1},\ldots,z_{i_k})$ з множини $\{x_1,\ldots,x_n,\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n\}$. Всі змінні в цьому кортежі вважаються різними. Обмеження виконано тоді і тільки тоді, коли P приймає цей кортеж. Розв'язком екземпляра є приписування значень істинності до $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Значення розв'язку є $\sum\limits_{i=1}^{m} P(z_{i_1},\ldots,z_{i_k})$, де w_i — невід'ємна вага i-го обмеження. Задача полягає в максимізації цього значення. Коли P залежить не більше ніж від k літералів Max-CSP-P, будемо називати Max-kCSP-P, якщо в P є k літералів, то — Max-EkCSP-P.

Нехай $w_{\rm opt}(I)$ — значення оптимального розв'язку екземпляра I.

Означення 2. Алгоритм A є C-наближеним для задачі максимізації, якщо для всіх екземплярів I задачі $w(A, I) \geqslant (1/C)\, w_{\text{opt}}(I)$, де $w(A, I)$ — значення розв'язку алгоритму A на вході I. При цьому кажуть, що A має апроксимаційне відношення C. Для ймовірнісних алгоритмів $w(A, I)$ — очікуване значення (математичне сподівання).

Введемо предикат $XOR(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$. В подальшому як приклад будемо розглядати задачу Max-Cut.

Означення 3 (Max-Cut). Для даного неорієнтованого графу $G = (V, E)$ із множинами вершин V і ребер E Max-Cut є задачею знаходження розбиття $C = (V_1, V_2)$ вершин $V(V = V_1 \bigcup V_2, V_1 \bigcap V_2 = \varnothing)$, яке максимізує число елементів множини $(V_1 \times V_2) \bigcap E$. Для заданої вагової функції $w\colon E \to R^+$ Max-Cut зважена задача полягає в максимізації $\sum e \in (V_1 \times V_2) \bigcap E^{w(e)}$.

Розглянемо більш детально задачу Max-Cut. Для графу $G = (V, E)$ ця задача (максимальний розріз в графі) визначається так: знайти таке розбиття множини вершин V на підмножини V_1 і V_2, щоб максимізувати число ребер, які утворюють розріз. Якщо кожній вершині поставити у відповідність булеву змінну $x_i (x_i = 1, i \in V_1, x_i = -1, i \in V_2)$, то дану задачу можна розглядати як Max-E2CSP-XOR або Max-E2-LIN з рівняннями вигляду $x_i x_j = -1$.

Поліноміальні оптимальні (порогові) наближені алгоритми для Max-EkCSP-P задач. Визначимо цілочисловий розрив α_{MC} SDP релаксації Max-Cut: $\alpha_{MC} = \sup\limits_G \left\{ \dfrac{SDP(G)}{OPT(G)} \right\}$, де $SDP(G)$ — оптимум релаксації. У роботах [4, 6] показано, що $\alpha_{MC} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1 - \cos\theta_c}{\theta_c} \approx 1{,}138$ (θ_c — "критичний кут", на якому досягається максимум).

Розглянемо довільну невиважену Max-EkCSP-P задачу Z (означення 1, всі ваги дорівнюють 1). Нехай $V = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ — множина змінних, E — множина обмежень. Обмеження $e \in E$ позначимо як $e = (x_{e_1}, \ldots, x_{e_k}), e_i \in [2n]$ зі спеціальним порядком на змінні (відносно V). Приписування є відображення $\rho\colon V \to \{0, 1\}$, відображення виконує обмеження e, якщо $P(\rho(x_{e_1}), \ldots, \rho(x_{e_k})) = 1$. Позначимо $OPT(I)$ оптимальний розв'язок для екземпляра I задачі Z. Нехай $SDP(I)$ — оптимум напіввизначеної релаксації (SDP релаксації) Рагхавендри [12]. Визначимо цілочисловий розрив $\alpha_Z = \sup\limits_{I \in Z} \left\{ \dfrac{SDP(I)}{OPT(I)} \right\}$. У [13] показано, як округлити розв'язок і знайти приписування з апроксимаційним відношенням, близьким до α_Z. Результат Рагхавендри [12] в даному випадку можна навести у вигляді теореми.

Теорема 1 [8]. *Припустимо, існує екземпляр I^* Max-EkCSP-P задачі Z такий, що $SDP(I) \geqslant c$ й $OPT(I) \leqslant s (\alpha_Z = c/s)$. Тоді для будь-якого $\gamma > 0$ існують $\varepsilon, \delta > 0$ і поліноміальна зведеність від екземпляра унікальної ігрової задачі до екземпляра I задачі Z така, що:*

(випадок-так): якщо $OPT(U) \geqslant 1 - \varepsilon$, то $OPT(I) \geqslant c - \gamma$;

(випадок-ні): якщо $OPT(U) \leqslant \delta$, то $OPT(I) \leqslant s + \gamma$.

Зокрема, припускаючи UGC є NP-складним, апроксимувати Z з відношенням, строго меншим α_Z.

Наслідок. *Для будь-якої Max-EkCSP-P задачі Zпри виконанні UGC існує поліноміальний пороговий (оптимальний) α_Z-наближений алгоритм.*

Зауважимо, що теорема 1 трансформує цілочисловий розрив у розрив неапроксимованості. Цінність результату Рагхавендри полягає в тому, що навіть не знаючи явно точного значення цілочислового розриву, можна встановити оптимальність відповідного поліноміального наближеного алгоритму (використовуючи екземпляри цілочислового розриву).

Поліноміальні оптимальні (порогові) наближені алгоритми для реоптимізації Max-EkCSP-P задач. Розглянемо довільну невиважену Max-EkCSP-P задачу Z (означення 1).

Нехай $V = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ — множина змінних, екземпляр I задачі Z такий, що $E = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}\}$ — множина з m обмежень. Обмеження $e^{(j)} \in E$ позначимо як $e^{(j)} = (x_{e_1^{(j)}}, \ldots, x_{e_k^{(j)}}), e_i^{(j)} \in [2n] (1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant k)$ зі спеціальним порядком на змінні (відносно V). Екземпляр I' задачі отримується з екземпляра I додаванням довільного $(m+1)$-го обмеження $e^{(m+1)}$ (такої самої структури, як і $e^{(j)}, 1 \leqslant j \leqslant m$). Визначимо реоптимізаційний варіант задачі Max-EkCSP-P.

Задача Ins-Max-EkCSP-P. Вхідні дані. Довільний екземпляр I задачі Max-EkCSP-P, x^* — оптимальний розв'язок екземпляра I.

Результат. Знайти оптимальний розв'язок екземпляра I' (отриманого, виходячи з I, як описано вище) задачі Max-EkCSP-P, використовуючи x^*.

Мета. Знайти x, яке максимізує число виконаних обмежень екземпляра I'.

Оскільки задача Max-EkCSP-P є NP-складною, то можна показати, що такою буде і Ins-Max-EkCSP-P.

Теорема 2. *Якщо $k = O(\log n)$ і для задачі Max-EkCSP-P існує поліноміальний ρ-наближений алгоритм, то для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) існує поліноміальний $\psi(\rho)$-наближений алгоритм, де $\psi(\rho) = 2 - 1/\rho$.*

Теорема 3. *Нехай для задачі Max-EkCSP-P існує поліноміальний оптимальний (пороговий) ρ-наближений алгоритм, а для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) — поліноміальний γ-наближений алгоритм, тоді $\gamma \geqslant \psi(\rho)$.*

Теорема 4. *Якщо для задачі Max-EkCSP-P існує поліноміальний оптимальний (пороговий) ρ-наближений алгоритм і $k = O(\log n)$, то для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) існує поліноміальний оптимальний (пороговий) $\psi(\rho)$- наближений алгоритм, де $\psi(\rho) = 2 - 1/\rho$.*

Теорема 5. *Припустимо, що має місце унікальна ігрова гіпотеза UGC. Нехай Z — довільна невиважена Max-EkCSP-P задача з цілочисловим розривом $\alpha_Z = \sup\limits_{I \in Z} \left\{ \dfrac{SDP(I)}{OPT(I)} \right\}$ і $k = \mathrm{const}$. Тоді для задачі Ins-Max-EkCSP-P (реоптимізація Max-EkCSP-P) існує поліноміальний оптимальний (пороговий) $\psi(\alpha_Z)$-наближений алгоритм, де $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$.*

Приклад. Розглянемо задачу Max-Cut. В наших позначеннях це буде задача Max-E2CSP-XOR, а реоптимізаційний варіант — задача Ins-Max-E2CSP-XOR, отримана додаванням довільного ребра до Max-Cut. Згідно з [4, 6], цілочисловий розрив SDP релаксації задачі Max-Cut дорівнює $\alpha_{MC} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1 - \cos\theta_c}{\theta_c} \approx 1{,}138$. Тоді з теореми 5 випливає

Теорема 6. *Якщо має місце унікальна ігрова гіпотеза UGC, то для задачі Ins-Max-E2CSP-XOR (реоптимізація Max-Cut) існує поліноміальний оптимальний (пороговий) $\psi(\alpha_{MC})$-наближений алгоритм, де $\psi(\alpha_{MC}) = 2 - 1/\alpha_{MC} \approx 1{,}121$.*

Таким чином, результати цієї роботи істотно залежать від істинності унікальної ігрової гіпотези UGC. Поряд із задачами взаємовідношень класів складності задач за включенням (наприклад, $P \overset{?}{\neq} NP$) це одна з основних відкритих проблем сучасної теоретичної інформатики.

1. *Arora S., Lund C., Motwani R. et al.* Proof verification and intractability of approximation problems // J. of the ACM. – 1998. – **45**, No 3. – P. 501–555.
2. *Goldreich O., Goldwasser S., Ron D.* Property testing and its connection to learning and approximation abstract // Ibid. – 1998. – **45**, No 4. – P. 653–750.
3. *Goemans M. X., Williamson D. P.* Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming // Ibid. – 1995. – **42**. – P. 1115–1145.
4. *Goemans M. X., Williamson D. P.* P. 0.878 approximation algorithms for MAX-CUT and MAX-2SAT // STOC. – 1994. – P. 422–431.
5. *Hastad J.* Some optimal inapproximability results // J. of the ACM. – 2001. – **48**, No 4. – P. 798–859.
6. *Feige U., Schechtman G.* On the integrality ratio of semidefinite relaxations of max cut // STOC. – 2001. – P. 433–442.
7. *Khot S.* On the power of unique 2-prover 1-round games // Ibid. – 2002. – P. 767–775.
8. *Khot S.* On the unique games conjecture // Proc. of the 25-th Annual IEEE Conf. on Computational Complexity. – 2010. – P. 99–121.
9. *Khot S., Kindler G., Mossel E., O'Donnell R.* Optimal inapproximability results for Max-Cut and other 2-variable CSPs? // FOCS. – 2004. – P. 146–154.
10. *Archetti C., Bertazzi L., Speranza M. G.* Reoptimizing the travelling salesman problem // Networks. – 2003. – **42**(**3**). – P. 154–159.
11. *Михайлюк В. А., Сергиенко И. В.* Реоптимизация обобщенных задач о выполнимости с аппроксимационно-устойчивыми предикатами // Кибернетика и систем. анализ. – 2012. – **47**, № 1. – С. 89–104.
12. *Raghavendra P.* Optimal algorithms and inapproximability results for every csp? // Proc. ACM Symp. on the Theory of Computing (STOC). – 2008. – P. 245–254.
13. *Raghavendra P., Steurer D.* How to round any csp? // Proc. Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). – 2009. – P. 586–594.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 21.05.2012

В. А. Михайлюк

Полиномиальная пороговая реоптимизация задач об обобщенной выполнимости с предикатами ограниченной размерности

При выполнении уникальной игровой гипотезы для решения задачи Ins-Max-EkCSP-P (реоптимизация Max-EkCSP-P при добавлении произвольного ограничения) при $k = \text{const}$ существует полиномиальный оптимальный (пороговый) $\psi(\alpha_Z)$-приближенный алгоритм, где $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$ и α_Z — целочисленный разрыв полуопределенной (SDP) релаксации Max-EkCSP-P задачи Z.

V. O. Mikhailyuk

Polynomial threshold reoptimization of generalized satisfiability problems with bounded arity predicates

When the unique game conjecture is hold for the problem Ins-Max-EkCSP-P (reoptimization of Max-EkCSP-P under insertion of any constraint), an polynomial optimal (threshold) $\psi(\alpha_Z)$-approximation algorithm exists, where $\psi(\alpha_Z) = 2 - 1/\alpha_Z$, $k = \text{const}$, and α_Z is the integrality gap of a semidefinite relaxation of the Max-EkCSP-P problem Z.