УДК 517.9

С. М. Чуйко

Ускорение сходимости итерационной схемы для нелинейной нетеровой краевой задачи

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Бойчуком)

Для нахождения решений нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае на основе эффективного метода Ньютона–Канторовича построена новая итерационная схема.

Постановка задачи. Для построения решения $z(t,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$ краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \qquad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \tag{1}$$

традиционно используется метод простых итераций [1, 2]. Достоинство этого метода заключается в простоте и численной устойчивости, однако сходимость итерационной схемы, получаемой по методу простых итераций, является линейной, поэтому естественно возникает задача о построении итерационного процесса, обладающего ускоренной сходимостью. Для решения поставленной задачи используем эффективный метод Ньютона–Канторовича [3, 4]. Решение нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \qquad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot)\colon C[a,b] \to \mathbb{R}^1$. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задачи (1) дважды непрерывно дифференцируемы по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и непрерывно дифференцируемы по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Предположим, что для порождающей задачи (2) имеет место критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0; \tag{3}$$

при этом порождающая задача (2) имеет r-параметрическое семейство решений $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s);\alpha](t)$. Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*}\colon R^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица ($X(a) = I_n$) однородной части системы (2), $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}; $(n \times r)$-мерная матрица $X_r(t)$ составлена из r-линейно независимых столбцов матрицы $X(t)$,

$$G[f(s);\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} + K[f(s)](t) -$$

обобщенный оператор Грина задачи (2), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу,

$$K[f(s)](t) = X(t) \int\limits_a^t X^{-1}(s) f(s)\, ds \text{ —}$$

оператор Грина задачи Коши для системы (2). Необходимое условие существования решения задачи (1) в критическом случае определяет следующая лемма [1].

Лемма 1. *Пусть краевая задача* (1) *представляет критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие* (3) *разрешимости порождающей задачи* (2). *Предположим также, что задача* (1) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t, c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), s, 0)](\cdot)\} = 0. \tag{4}$$

Предположим далее необходимое условие разрешимости задачи (1) выполненным. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (4), ищем решение задачи (1)

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t) c_r^* + G[f(s); \alpha](t).$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z,t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} &Z(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \\ &\qquad = Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t) x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}}, \qquad A_2(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon = 0}}.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ и непрерывность по второму аргументу, выделяем линейные по x и по ε части $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ и $\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ этого функционала и член $J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), 0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Обозначим $(d \times r)$-матрицу

$$B_0 = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\};$$

при условии $P_{B_0^*} = 0$ операторная система $x(t,\varepsilon) = \Phi x(t,\varepsilon)$ эквивалентна задаче о построении решения операторного уравнения на множестве функций $x(t,\varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$; здесь

$$\begin{aligned}\Phi x(t,\varepsilon) = -X_r(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\{\varepsilon\ell_1 G[Z(z_0+x,s,\varepsilon); J(z_0+x,\varepsilon)](\cdot) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +\\ + J_1(z_0+x,\varepsilon) - \ell K[\varepsilon A_1(s)G[Z(z_0+x,\tau,\varepsilon); J(z_0+x,\varepsilon)](s) + \varepsilon A_2(s) +\\ + R_1(z_0+x,s,\varepsilon)](\cdot)\} + \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t) +\\ + X_r(t)P_\rho c_\rho.\end{aligned}$$

Оператор $\Phi(Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))$ представляет собой суперпозицию билинейного по $Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ оператора, действующего на непрерывно дифференцируемую по x функцию $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Таким образом, оператор $\Phi x(t,\varepsilon)$ — непрерывный ограниченный оператор, действующий из пространства непрерывных на отрезках $[a,b]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций $x(t,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$ в себя. Производная последнего оператора имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon))}{\partial x} =\\ = -X_r(t)B_0^+ P_{Q_r^*}\Bigg\{\varepsilon\ell_1 G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot) + \frac{\partial J_1(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x} -\\ - \ell K\left[\varepsilon A_1(s)G\left[\frac{\partial Z(z_0+x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0+x,\varepsilon)}{\partial x}\right](s) + \frac{\partial R_1(z_0+x,s,\varepsilon)}{\partial x}\right](\cdot)\Bigg\} +\\ + \varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x}; \frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right](t).\end{aligned}$$

Для применения общей схемы метода Ньютона–Канторовича в критическом случае первого порядка введем в рассмотрение оператор

$$\varphi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)) = \Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)) - x(t,\varepsilon).$$

В достаточно малой окрестности порождающего решения

$$\det\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon))}{\partial x} - I_n\right] \neq 0,$$

поскольку при $\varepsilon \to 0$

$$\det\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon))}{\partial x} - I_n\right] \geqslant 1 - \det\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon))}{\partial x}\right] \to 1.$$

Предположим выполненным при достаточно малом $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*]$ условие

$$2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon) < 1.$$

Здесь величины $\gamma_1(\varepsilon)$, $\gamma_2(\varepsilon)$, $\gamma_3(\varepsilon)$ гарантируют выполнение неравенств

$$\left\| \left\{ \frac{\partial \varphi(z_0, \varepsilon)}{\partial z} \right\}^{-1} \right\| \leqslant \gamma_1(\varepsilon), \qquad \|\varphi(z_0, \varepsilon)\| \leqslant \gamma_2(\varepsilon), \qquad \left\| \frac{\partial^2 \varphi(z(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z^2} \right\| \leqslant \gamma_3(\varepsilon).$$

При этом, согласно теореме Канторовича [3, с. 680], приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть краевая задача* (1) *представляет критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие* (3) *разрешимости порождающей задачи* (2). *Тогда для каждого простого* ($P_{B_0^*} = 0$) *корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения* (4) *для порождающих констант задача* (5), (6) *имеет по меньшей мере одно решение* $x(t, \varepsilon) \in C^1[a, b]$, $C[0, \varepsilon_0]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в нулевое* $x(t, 0) \equiv 0$. *Задача* (1) *имеет в этом случае по меньшей мере одно решение:*

$$z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b], \qquad C[0, \varepsilon_0],$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) \equiv z_0(t, c_r^*)$, *которое может быть найдено при помощи сходящегося для* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *итерационного процесса*

$$z_k(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = x_k(t, \varepsilon) - \left[\frac{\partial \Phi(z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon))}{\partial x} - I_n \right]^{-1} [\Phi(z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon)) - x_k(t, \varepsilon)],$$

$$x_0(t, \varepsilon) \equiv 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Приведенная итерационная схема обеспечивает квадратичную сходимость [5] в отличие от полученных нами ранее итерационных процессов [6, 7].

Пример. Покажем, что все требования теоремы выполнены для задачи

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = (2t - 1)z + \varepsilon z \ln z, \\ &\ell z(\cdot) = z(0, \varepsilon) - z(1, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциального уравнения (7) — функция $X(t) = e^{t^2 - t}$; поскольку $Q = \ell X(\cdot) = 0$, постольку имеет место критический случай; при этом $r = d = 1$. Решение порождающей задачи имеет вид $z_0(t, c_r^*) = e^{t^2 - t + 1/6}$. Задача о нахождении периодического решения уравнения (7) представляет критический случай, при этом $B_0 = B_0^{-1} = 1$, следовательно, в данном случае выполнены все условия доказанной теоремы. Для нахождения первого приближения используем оператор

$$\Phi(z_0(t, c_r^*)) = \varepsilon e^{1/6} e^{t^2 - t} \left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right).$$

Производная этого оператора имеет вид

$$\frac{\partial \Phi(z_0(t, c_r^*))}{\partial x} = \varepsilon G[A_1(s); 0](t) + \varepsilon X_r(t) B_0^{-1} P_{Q_r^*} \ell K\{A_1(s) G[A_1(\tau); 0](s)\}(\cdot).$$

В отличие от оператора $\Phi(z_0(t, c_r^*))$, значение его производной $\Phi'_x(z_0(t, c_r^*))$ не выражается через элементарные функции. Для вычисления второго слагаемого воспользуемся разложением интеграла $G[A_1(s); 0](t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 1/2$. Таким образом, на первом шаге итерационной схемы находим первое приближение $z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (7); полагая $\varepsilon=0,1$, здесь

$$x_1(t,\varepsilon)=-\left[\frac{\partial\Phi(z_0(t,c_r^*))}{\partial x}-1\right]^{-1}\cdot\Phi(z_0(t,c_r^*))\approx$$

$$\approx -5{,}31111\cdot 10^{-12}+0{,}018594\cdot t-0{,}0712929\cdot t^2+0{,}105586\cdot t^3-0{,}108013\cdot t^4+$$

$$+0{,}0854975\cdot t^5-0{,}0459865\cdot t^6+0{,}0152232\cdot t^7+0{,}00522619\cdot t^8-0{,}0103855\cdot t^9+$$

$$+0{,}00729421\cdot t^{10}+0{,}000907002\cdot t^{11}-0{,}00980691\cdot t^{12}+0{,}0174217\cdot t^{13}-$$

$$-0{,}0216099\cdot t^{14}+0{,}0213278\cdot t^{15}-0{,}0169551\cdot t^{16}+0{,}0106973\cdot t^{17}-$$

$$-0{,}00516626\cdot t^{18}+0{,}00180097\cdot t^{19}-0{,}000404909\cdot t^{20}+0{,}0000446962\cdot t^{21}.$$

Для нахождения второго приближения воспользуемся неограниченной дифференцируемостью нелинейности $Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ уравнения (7) по неизвестной $z(t,\varepsilon)$ в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ и независимостью этой нелинейности от малого параметра ε. Разлагая нелинейность, вычисляем второе приближение $z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (7); здесь

$$x_2(t;0{,}1)\approx -0{,}0000294344+0{,}019653\cdot t-0{,}0771809\cdot t^2+0{,}122051\cdot t^3-0{,}13815\cdot t^4+$$

$$+0{,}12724\cdot t^5-0{,}0913763\cdot t^6+0{,}0542647\cdot t^7-0{,}0198152\cdot t^8-0{,}00292169\cdot t^9+$$

$$+0{,}0173311\cdot t^{10}-0{,}0258518\cdot t^{11}+0{,}0329137\cdot t^{12}-0{,}0393473\cdot t^{13}+0{,}0431496\cdot t^{14}-$$

$$-0{,}041112\cdot t^{15}+0{,}0325485\cdot t^{16}-0{,}020602\cdot t^{17}+0{,}00998658\cdot t^{18}-$$

$$-0{,}00348343\cdot t^{19}+0{,}000780806\cdot t^{20}-0{,}0000852132\cdot t^{21}.$$

Точность полученных приближений демонстрирует последовательное уменьшение от итерации к итерации норм невязок; действительно, при $\varepsilon=0,1$ имеем

$$\left\|A(t)z_0(t,c_r^*)+\varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0)-\frac{dz_0(t,c_r^*)}{dt}\right\|_{L^2[0;1]}\approx 0{,}0196893;$$

$$\left\|A(t)x_1(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-\frac{dx_1(t,\varepsilon)}{dt}\right\|_{L^2[0;1]}\approx 1{,}23248\cdot 10^{-3};$$

$$\left\|A(t)x_2(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-\frac{dx_2(t,\varepsilon)}{dt}\right\|_{L^2[0;1]}\approx 6{,}28002\cdot 10^{-5}.$$

Проверим далее условие сходимости; для этого согласно теореме Канторовича [3, с. 680, 682] проверим выполнение в достаточно малой окрестности порождающего решения условия $2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon)<1$. Здесь величины $\gamma_1(\varepsilon)$, $\gamma_2(\varepsilon)$, $\gamma_3(\varepsilon)$ гарантируют выполнение неравенств

$$\left\|\left\{\frac{\partial\varphi(z_0,\varepsilon)}{\partial z}\right\}^{-1}\right\|\leqslant\gamma_1(\varepsilon),\qquad \|\varphi(z_0,\varepsilon)\|\leqslant\gamma_2(\varepsilon),\qquad \left\|\frac{\partial^2\varphi(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2}\right\|\leqslant\gamma_3(\varepsilon).$$

При $\varepsilon=0{,}1$ имеем $\gamma_1(\varepsilon)\geqslant(1{,}0589)^{-1}$. Далее

$$\|\varphi(z_0,\varepsilon)\|=\|\Phi(z_0,\varepsilon)\|=\left\|\varepsilon\cdot e^{1/6}\cdot e^{t^2-t}\cdot\left(\frac{t}{6}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\right\|\approx 0{,}00161145,$$

следовательно, $\gamma_2(\varepsilon) \geqslant 0{,}00161145$. Поскольку при $\varepsilon = 0{,}1$

$$\gamma_1(\varepsilon) \approx \max_{[0;1]} |\varphi''(z_0(t, c_r^*) + x_2(t, \varepsilon))| \approx 1{,}25383,$$

постольку

$$2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon) \approx 0{,}00381621 \ll 1,$$

следовательно, при $\varepsilon = 0{,}1$ условие сходимости полученной итерационной схемы выполняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0–1) и Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – Москва: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
5. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 440 с.
6. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. – № 10. – С. 1668–1674.
7. *Чуйко С. М.* Ускорение сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 127–132.

Славянский государственный педагогический университет

Поступило в редакцию 14.06.2012

С. М. Чуйко

Прискорення збіжності ітераційної схеми для нелінійної нетерової крайової задачі

Для знаходження розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку з використанням методу Ньютона–Канторовича побудовано нову ітераційну схему.

S. M. Chuiko

Acceleration of the convergence of an iteration procedure for a nonlinear Noetherian boundary-value problem

The convergent iteration algorithm on the basis of Newton–Kantorovich's method for the construction of the solutions of Noetherian weakly nonlinear boundary-value problem for a system of differential equations is proposed.