ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2013

МЕХАНІКА

УДК 539.3

А. А. Каминский, Е. Е. Курчаков

О влиянии растяжения вдоль трещины в нелинейном упругом теле при наличии зоны предразрушения

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Рассмотрено нелинейное упругое тело с центральной трещиной нормального отрыва. Принято, что к каждой из вершин трещины примыкает зона предразрушения, окруженная зоной нелинейности. В результате численного решения соответствующей краевой задачи установлено влияние растяжения вдоль трещины на ее раскрытие, а также на параметры зоны нелинейности.

В работе [1] выявлено влияние зоны предразрушения на раскрытие трещины нормального отрыва в нелинейном упругом теле. Настоящая работа посвящена изучению вопроса о том, как именно растяжение вдоль трещины нормального отрыва в нелинейном упругом теле сказывается на ее раскрытии в вершине, а также на размерах и форме зоны нелинейности при наличии зоны предразрушения.

Постановка краевой задачи. Остановимся на случае обобщенного плоского напряженного состояния. В этой связи рассмотрим тело малой толщины. Как и в работе [1], примем, что при растяжении тела в направлении, перпендикулярном трещине, у каждой вершины трещины возникает зона предразрушения. Представим ее в виде разреза, к поверхностям которого приложены некоторые напряжения, подлежащие определению при решении краевой задачи.

Ограничимся малыми деформациями. Постановку краевой задачи осуществим в перемещениях.

Для постановки краевой задачи потребуются нелинейные определяющие уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{S}$ с компонентами тензора деформаций $\boldsymbol{D}$. Воспользуемся тензорно-линейными определяющими уравнениями в виде [1]

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma}\left[g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}D_{\gamma\delta} - \frac{\rho E}{3\rho+\sigma}g^{\alpha\beta} - \widetilde{\varphi}(\Omega)\left(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}D_{\gamma\delta} - \frac{E}{3}g^{\alpha\beta}\right)\right]. \qquad (1)$$

Аргументом функции $\widetilde{\varphi}(\Omega)$ является величина

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{\sigma}\left(\Upsilon - \frac{E^2}{3}\right)}. \tag{2}$$

Инварианты E и Υ таковы:

$$E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \qquad \Upsilon = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \tag{3}$$

Константы ρ и σ могут быть выражены через константы Ламе.

Следуя работе [2], введем постоянную υ, большую нуля, и предположим, что

$$\widetilde{\varphi}(\Omega)\mid_{\Omega\leqslant\upsilon} = 0; \qquad \widetilde{\varphi}(\Omega)\mid_{\Omega>\upsilon} = \frac{\Omega - \upsilon + p - \sqrt[3]{\sqrt{q^3 + r^2} - r} + \sqrt[3]{\sqrt{q^3 + r^2} + r}}{\Omega}, \tag{4}$$

где

$$p = \frac{b}{3c}; \qquad q = p^2 + \frac{1}{3c}; \qquad r = p^3 - \frac{1}{2c}(\Omega - \upsilon + p). \tag{5}$$

Постоянная υ, а также коэффициенты b и c подразумеваются известными.

Учитывая формулы (4), придем к заключению, что связь компонент тензора напряжений $\boldsymbol{S}$ с компонентами тензора деформаций $\boldsymbol{D}$, описываемая уравнениями (1), будет линейной, если $\Omega \leqslant \upsilon$, но нелинейной, если $\Omega > \upsilon$. Следовательно, приходим к критерию нелинейности

$$\Omega = \upsilon. \tag{6}$$

Привлечем прямоугольную декартову систему координат x^1, x^2, x^3, характеризуемую тем, что для нее компоненты метрического тензора $\boldsymbol{g}$ выразятся так:

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \tag{7}$$

Соотношения между компонентами тензора деформаций $\boldsymbol{D}$ и компонентами вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ имеют вид [3]

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta}\ (\varepsilon, \zeta). \tag{8}$$

В соотношениях (8) предполагается симметрирование по индексам ε, ζ.

Подставив в уравнения (1) соотношения (8), получим

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma}\left\{\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma}\right) - \frac{\rho E}{3\rho + \sigma} g^{\alpha\beta} - \widetilde{\varphi}(\Omega)\left[\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma}\right) - \frac{E}{3} g^{\alpha\beta}\right]\right\}. \tag{9}$$

В соответствии с формулами (3), равенствами (7) и соотношениями (8)

$$E = \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\beta}; \qquad \Upsilon = \frac{1}{4}\sum_{\gamma=1}^{3}\sum_{\delta=1}^{3}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma}\right)\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma}\right). \tag{10}$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния имеем

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \qquad (\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2); \tag{11}$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2,\ \beta = 3;\ \alpha = 3,\ \beta = 1, 2;\ \alpha = 3,\ \beta = 3). \tag{12}$$

Принимая во внимание равенства (12) и (7), а также первую из формул (10), на основании уравнений (9) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{3\rho + \sigma}{2\rho + \sigma}\left[\frac{\rho}{3\rho + \sigma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{3}\widetilde{\varphi}(\Omega)\left(2\frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right)\right]. \tag{13}$$

Поскольку $\widetilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$, то вследствие равенств (12) и (7) из уравнений (9) вытекает, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 1, 2,\ \delta = 3;\ \gamma = 3,\ \delta = 1, 2). \tag{14}$$

Опираясь на уравнения (9), согласно равенствам (7), а также первой из формул (10) и выражению (13), установим

$$\begin{aligned} S^{11} &= \frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)}\left[(\rho + \sigma)\frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right] - T^{11}; \qquad S^{12} = \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right) - T^{12};\\ S^{21} &= \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right) - T^{21}; \qquad S^{22} = \frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)}\left[(\rho + \sigma)\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial u_1}{\partial x^1}\right] - T^{22}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned} T^{11} &= \frac{1}{3\sigma(2\rho + \sigma)}\widetilde{\varphi}(\Omega)\left[(3\rho + 2\sigma)\frac{\partial u_1}{\partial x^1} - (3\rho + \sigma)\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \sigma\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right];\\ T^{12} &= \frac{1}{2\sigma}\widetilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right); \qquad T^{21} = \frac{1}{2\sigma}\widetilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right);\\ T^{22} &= \frac{1}{3\sigma(2\rho + \sigma)}\widetilde{\varphi}(\Omega)\left[(3\rho + 2\sigma)\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (3\rho + \sigma)\frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \sigma\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения равновесия в компонентах тензора напряжений $\boldsymbol{S}$ имеют вид [3]

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0.$$

Эти уравнения в силу формул (11) и равенств (12) сводятся к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial S^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{12}}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial S^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{22}}{\partial x^2} = 0. \tag{17}$$

Допуская, что константы ρ и σ не зависят от координат x^1, x^2, на основании уравнений (17), внеся в них уравнения (15), выведем

$$\begin{aligned} &\frac{\rho + \sigma}{\sigma(2\rho + \sigma)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{1}{2(2\rho + \sigma)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{2\sigma}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} = Q^1;\\ &\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{1}{2(2\rho + \sigma)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\rho + \sigma}{\sigma(2\rho + \sigma)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} = Q^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$Q^1 = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x^2}; \qquad Q^2 = \frac{\partial T^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{22}}{\partial x^2}. \tag{19}$$

Предположим, что известны компоненты единичного вектора внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхностям тела, а также трещины и разрезов. На этих поверхностях зададим компоненты вектора напряжений $\boldsymbol{P}$.

Граничные условия для компонент тензора напряжений $\boldsymbol{S}$ имеют вид [3]

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha.$$

Эти условия в силу равенств (12) сводятся к таким условиям:

$$S^{11} n_1 + S^{12} n_2 = P^1; \qquad S^{21} n_1 + S^{22} n_2 = P^2. \tag{20}$$

Внеся в условия (20) уравнения (15), выведем

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sigma(2\rho+\sigma)}\left[(\rho+\sigma)\frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right] n_1 + \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right) n_2 = P^1 + R^1; \\ \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right) n_1 + \frac{1}{\sigma(2\rho+\sigma)}\left[(\rho+\sigma)\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial u_1}{\partial x^1}\right] n_2 = P^2 + R^2. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь

$$R^1 = T^{11} n_1 + T^{12} n_2; \qquad R^2 = T^{21} n_1 + T^{22} n_2. \tag{22}$$

Будем считать, что тело является прямоугольным, а трещина располагается по центру. Пусть оси симметрии тела совпадают с осями x^1,x^2.

Положим, что компоненты $P^\alpha (\alpha = 1, 2)$ равномерно распределены по поверхностям тела, а также трещины и разрезов. Поэтому будет достаточно рассмотреть лишь четвертую часть тела, например, располагающуюся в первом квадранте (рис. 1).

Отметим, что вершины трещины и разреза — это точка A с координатами $x^1 = 0$, $x^2 = f$ и точка B с координатами $x^1 = 0$, $x^2 = g$ соответственно.

Из симметрии относительно оси x^2 следует, что в вершине разреза

$$u_1 = 0. \tag{23}$$

Обособим вблизи вершины разреза точку (a^1, a^2). Записав координаты вершины разреза в виде $a^1{+}\varepsilon^1$, $a^2{+}\varepsilon^2$, а затем составив кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням ε^1, ε^2, придем к уравнению

$$\begin{gathered} -u_2 + u_2(a^1, a^2) + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right|_{(a^1,a^2)} \varepsilon^1 + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right|_{(a^1,a^2)} \varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1}\right|_{(a^1,a^2)} \varepsilon^1\varepsilon^1 + 2\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2}\right|_{(a^1,a^2)} \varepsilon^1\varepsilon^2 + \left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2}\right|_{(a^1,a^2)} \varepsilon^2\varepsilon^2 \right) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Подчеркнем, что уравнения (18) и (21), а также (23) и (24) являются разрешающими для компонент u_1, u_2.

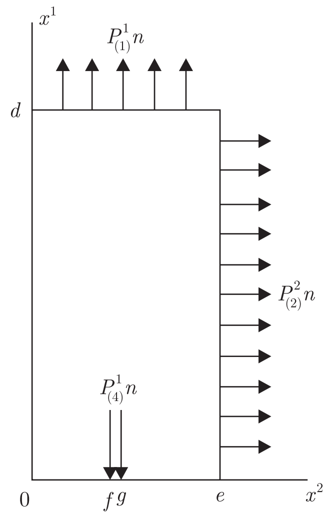

Рис. 1

Числовой пример. Исследуем влияние растяжения вдоль трещины на ее раскрытие в вершине, а также на размеры и форму зоны нелинейности.

Данные, использованные при решении краевой задачи, позаимствованы из работы [1]. Для констант ρ и σ имеем:

$$-\rho = 0{,}046 \cdot 10^{-10}\ \text{Па}^{-1}; \qquad \sigma = 0{,}222 \cdot 10^{-10}\ \text{Па}^{-1}.$$

Для постоянной υ, а также коэффициентов b и c имеем:

$$\upsilon = 3{,}25 \cdot 10^{2}\ \text{Па}^{1/2}; \qquad b = 0{,}1964347 \cdot 10^{-2}\ \text{Па}^{-1/2}; \qquad c = 0{,}5632820 \cdot 10^{-4}\ \text{Па}^{-1}.$$

Были заданы

$$d = 6{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{м}; \qquad e = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{м}; \qquad f = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{м}; \qquad g = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{м};$$
$$-\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0{,}02 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Полагалось, что

$$P^\alpha(d, x^2) = P^\alpha_{(1)}, \qquad \text{если} \qquad x^2 \in [0, e);$$
$$P^\alpha(x^1, e) = P^\alpha_{(2)}, \qquad \text{если} \qquad x^1 \in [0, d);$$
$$P^\alpha(0, x^2) = \begin{cases} P^\alpha_{(3)}, & \text{если} \quad x^2 \in [0, f); \\ P^\alpha_{(4)}, & \text{если} \quad x^2 \in [f, g), \end{cases}$$

причем

$$P^2_{(1)} = P^1_{(2)} = P^1_{(3)} = P^2_{(3)} = P^2_{(4)} = 0.$$

Укажем, что $P^1_{(1)}$ оставалось неизменным, равным $5{,}00 \cdot 10^7$ Па. Вместе с тем, $P^2_{(2)}$ придавалось несколько значений. При этом $P^1_{(4)}$ задавалось из условия, что компонента S^{11} должна принимать в вершине разреза такое же значение, как и на его верхней поверхности.

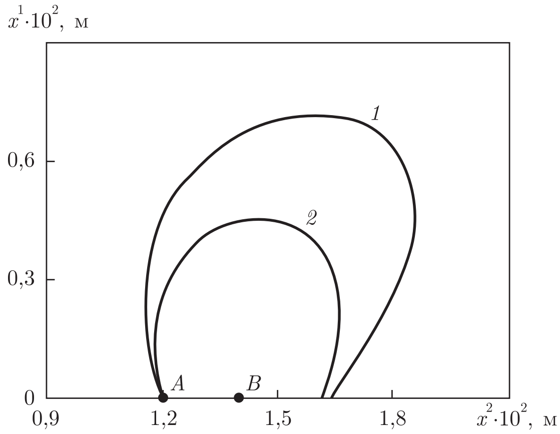

Рис. 2

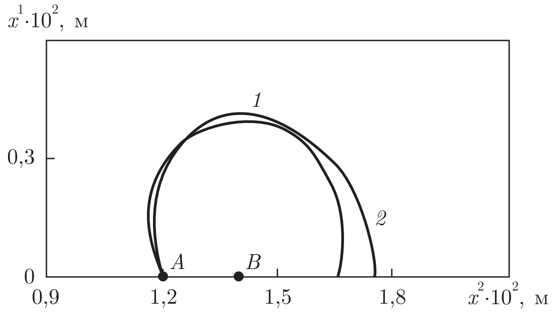

Рис. 3

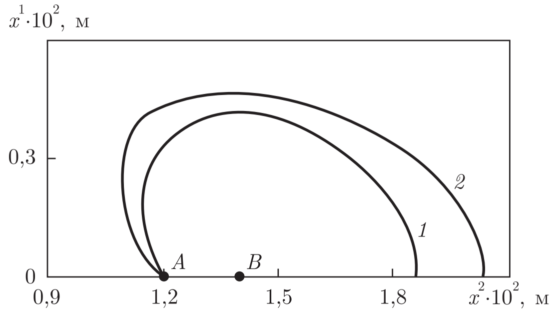

Рис. 4

Решение уравнений (18) и (21), а также (23) и (24) (с учетом формул (19) и (22), (16), (4), (5), (2), (10), равенств (14), выражения (13)) найдено численно, для чего использован метод последовательных приближений Ильюшина [4]. В результате установлено раскрытие трещины в вершине, т. е. $u_1(0, f) \equiv u_1^A$.

Следует сказать, что растяжение вдоль трещины оказало слабое влияние как на напряжение, приложенное к верхней поверхностям разреза, так и на раскрытие трещины в вершине. Интересно, что с увеличением $P^2_{(2)}$ характер его воздействия, как это явствует из табл. 1, менялся. Действительно, $P^1_{(4)}$ и u_1^A сначала несущественно уменьшались, а потом — увеличивались.

Таблица 1

$P^2_{(2)} \cdot 10^{-7}$, Па	$-P^1_{(4)} \cdot 10^{-7}$, Па	$u_1^A \cdot 10^6$, м
0,00	14,14	6,907
1,00	14,21	6,824
2,00	14,25	6,784
3,00	14,24	6,777
4,00	14,21	6,797
5,00	14,16	6,838
6,00	14,08	6,896
7,00	13,99	6,971
8,00	13,89	7,062

Граница зоны нелинейности определена по критерию (6) с помощью формул (10) и равенств (14). Она изображена на рис. 2–4.

Итак, растяжение вдоль трещины привело к значительному изменению протяженности зоны нелинейности в направлениях осей x^1, x^2. Важно, что по мере увеличения $P^2_{(2)}$ (см. табл. 1) наблюдалась существенная трансформация зоны нелинейности. Так, из рис. 2 (кривые *1* и *2* получены при первом и четвертом значениях $P^2_{(2)}$) видно, что протяженность зоны нелинейности стала меньшей в обоих направлениях. Далее, из рис. 3 (кривые *1* и *2* получены при пятом и седьмом значениях $P^2_{(2)}$) видно, что протяженность зоны нелинейности оказалась меньшей в направлении оси x^1, но большей в направлении оси x^2. Наконец, из рис. 4 (кривые *1* и *2* получены при восьмом и девятом значениях $P^2_{(2)}$) видно, что протяженность зоны нелинейности стала большей в обоих направлениях.

1. *Каминский А. А., Курчаков Е. Е.* Моделирование зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном упругом теле // Прикл. механика. — 2011. — **47**, № 6. — С. 149–158.
2. *Каминский А. А., Курчаков Е. Е., Гаврилов Г. В.* О влиянии растягивающей вдоль трещины нагрузки на формирование зоны пластичности в анизотропном теле // Там же. — 2010. — **46**, № 6. — С. 27–42.
3. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. — Москва: Наука, 1971. — 376 с.
4. *Ильюшин А. А.* Некоторые вопросы теории пластических деформаций // Прикл. математика и механика. — 1943. — **7**, № 4. — С. 245–272.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.07.2012

А. О. Камінський, Є. Є. Курчаков

Про вплив розтягнення вздовж тріщини в нелінійному пружному тілі за наявності зони передруйнування

Розглянуто нелінійне пружне тіло із центральною тріщиною нормального відриву. Прийнято, що до кожної з вершин тріщини примикає зона передруйнування, оточена зоною нелінійності. В результаті чисельного розв'язання відповідної крайової задачі встановлено вплив розтягнення вздовж тріщини на її розкриття, а також на параметри зони нелінійності.

A. A. Kaminsky, E. E. Kurchakov

On the influence of tension along the crack in a nonlinear elastic body in the presence of a prefracture zone

A nonlinear elastic body with a central opening-mode crack is considered. It is suggested that both crack tips are in contact with a prefracture zone enveloped by a domain of nonlinearity. By solving the associated boundary-value problem numerically, the influence of the tension along the crack on its opening displacement and on parameters of the domain of nonlinearity is estimated.