

Академик НАН Украины Г. В. Кнышов, С. В. Зубков, Е. А. Настенко, Е. О. Лебедева, А. О. Матвийчук, Ю. В. Шардукова

Моделирование профиля напряжений в стенках извитых коронарных артерий системы кровообращения человека

С помощью математического моделирования показано, что неравномерное распределение нормальных напряжений на криволинейном участке коронарной артерии может влиять на образование ее петлеобразных изгибов с уплощенной вершиной, что хорошо согласуется с данными коронарографии. Определена зона оптимального размещения шунта при аортокоронарном шунтировании, в результате чего напряжения в стенке искривленного участка могут быть уменьшены. Это снижает вероятность развития приступов стенокардии, вызванных избыточным трансмуральным давлением.

В последние годы все большее внимание уделяется конфигурационным аномалиям артериальных сосудов как причине локальных нарушений кровообращения [1, 2]. Одной из наиболее распространенных конфигурационных аномалий является извитость коронарных артерий.

Актуальность данной работы для кардиологии и кардиохирургии определяется наличием нарушений кровотока в извитых коронарных артериях (ИКА) как возможной самостоятельной причины возникновения синдрома стенокардии и(или) инфаркта миокарда и так называемого синдрома X.

Неравномерное распределение напряжений в стенке коронарной артерии (КА) может иметь следующие последствия:

- приводить к ремоделированию, т. е. изменению формы артерии с течением времени;
- быть причиной приступов стенокардии и(или) острого коронарного синдрома вследствие резкого локального повышения трансмурального давления в КА;
- приводить к развитию склероза КА вследствие локального повреждения стенок;
- вызывать недостаточность коронарного кровообращения;
- приводить к развитию хронической недостаточности кровообращения.

ИКА могут встречаться как самостоятельная и как сопутствующая патология [2]. Во втором случае при наличии выраженного синдрома стенокардии может быть выполнено аортокоронарное шунтирование. Здесь уместно поставить задачу оптимального места вшивания шунта для максимальной разгрузки стенок КА.

Исследование представленной проблемы целесообразно проводить с помощью математических моделей, поскольку экспериментальное изучение данной проблемы представляется трудновыполнимой (малоразрешимой) задачей.

Целью работы было математическое моделирование распределения напряжений в стенках извитых коронарных артерий, их влияния на формообразование КА и выработка рекомендаций по снижению напряжений путем аортокоронарного шунтирования.

Как показал анализ данных литературы, данная проблема формализована и исследована недостаточно. Отсутствует общепринятое клиническое определение извитых сосудов.

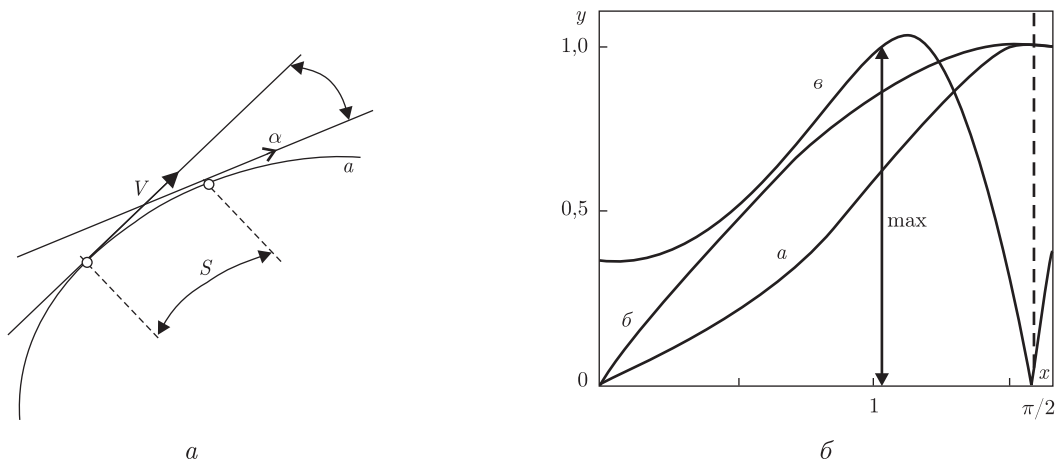


Рис. 1. Особенности извитых КА: *a* — определение кривизны линии; *б* — графики кривизны k (кривая 1) функции (кривая 2) и модуля производной от k (кривая 3)

Известно [3], что движение точки вдоль кривой a связано с непрерывным изменением двух величин: расстояния S , на которое удалена точка от начального положения, и угла α поворота касательной относительно начального положения (рис. 1, *a*).

Если с увеличением пути S непрерывно увеличивается и α , кривая называется простой. Извитой назовем любую непростую линию, у которой с увеличением пути S угол смежности α периодически изменяется как по величине, так и по знаку.

Угол смежности α между касательными в двух бесконечно близких точках кривой, отнесенный к длине дуги S между этими точками, определяет степень искривленности линии, т.е. определяет кривизну k кривой

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta S}. \quad (1)$$

Для выяснения гидродинамического смысла кривизны k кровеносного сосуда разделим числитель и знаменатель выражения (1) на Δt . Тогда при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta S \rightarrow 0$ получим:

$$k = \lim_{\delta \Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta S} = \lim_{\delta \Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}}{\frac{\Delta S}{\Delta t}} = \frac{\Omega}{V}, \quad (2)$$

т.е.

$$\Omega = kV, \quad (3)$$

где V — линейная скорость кровотока в данной точке сосуда; Ω — угловая скорость вращения вектора линейной скорости кровотока V в этой же точке.

Таким образом, кривизна k сосуда в точке численно равна скорости вращения вектора линейной скорости кровотока, приходящейся на единицу его величины (модуля).

Поскольку Ω и V являются функциями времени $\Omega = \Omega(t)$, $V = V(t)$, то

$$\frac{d}{dt} k = \frac{\Omega'(t)V(t) - V'(t)\Omega(t)}{V^2(t)}. \quad (4)$$

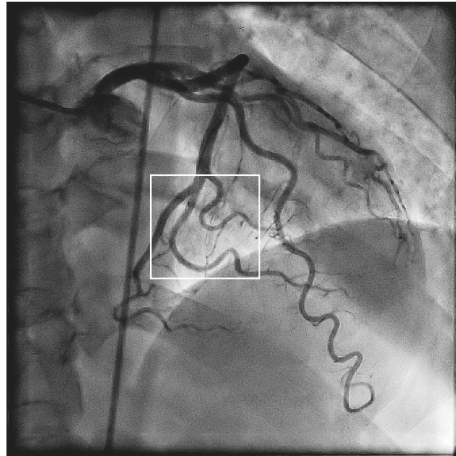


Рис. 2. Ангиограмма коронарной артерии

Если на малых расстояниях можно считать $V(t) = V = \text{const}$ (в силу малых изменений диаметра сосуда и принципа неразрывности потока), то модуль производной от k будет характеризовать угловое ускорение элементарного объема крови под воздействием внешних сил

$$\left| \frac{d}{dt} k \right| \approx \frac{\Omega'(t)}{V}. \quad (5)$$

Его максимумы на графике (рис. 1, б, кривая 3) указывают на те участки сосуда, где он подвергается наибольшему воздействию внешних сил, а значит, и большим деформациям.

Это может указать направление поиска объяснения эффекта дистального уплощения вершук изгибов (рис. 2).

При исследовании формы реальных КА на поверхности миокарда было замечено, что диаметр КА уменьшается в дистальном направлении, амплитуда изгибов увеличивается, а период уменьшается.

Кроме того, наблюдается уплощение вершук изгибов, что может быть удовлетворительно аппроксимировано функцией $y = \sin(x^3)^{2/3} e^{x/4}$, наложенной на цилиндрическую поверхность, образующей которой является периметр, по которому сосуд расположен на поверхности миокарда.

Для потока реальной жидкости уравнение Бернулли имеет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2g} + h_w, \quad (6)$$

где \bar{v}_1 и \bar{v}_2 — средние скорости движения жидкости в рассматриваемых сечениях; α_1 и α_2 — коэффициенты кинетической энергии, величина которых зависит от степени неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока, h_w — потери напора.

Коэффициент α выражает отношение действительной кинетической энергии K_d , определенной по истинным скоростям движения жидкости, к условной кинетической энергии K_y , определенной по средней скорости потока \bar{v} :

$$\alpha = \frac{K_d}{K_y} = \frac{\int v^2 ds}{\bar{v}^2 Q}. \quad (7)$$

Потери напора могут быть разделены на два вида:

потери напора по длине h_l , пропорциональные длине потока и обусловленные силами трения между жидкостью и стенками трубопровода;

местные потери напора h_m — потери, сосредоточенные на коротких участках потока и обусловленные резкими деформациями потока, изменением скорости потока по величине и направлению.

Потери напора по длине определяются по формуле Дарси:

$$h_l = \lambda \frac{l \bar{v}^2}{2gD}, \quad (8)$$

где λ — коэффициент гидравлического трения (определяется опытным путем); l — длина участка; D — расчетный внутренний диаметр.

Местные потери напора определяются по формуле Вейсбаха:

$$h_m = \zeta \frac{\bar{v}^2}{2gD}, \quad (9)$$

где ζ — коэффициент местного сопротивления.

Экспериментально установлено, что коэффициент местного сопротивления плавного поворота сосуда на угол θ при, например $D/(2R) = 0,33$, описывается формулой:

$$\zeta_{\text{п}} = 0,18 \frac{\theta}{90^n}. \quad (10)$$

Формула (9) описывает потери кинетической энергии потока, затраченной на поворот вектора количества движения и перешедшие в тепло и потенциальную энергию деформации стенки сосуда. Для радиального сечения нормальные (разрывающие) напряжения σ в сечении стенки толщиной δ , возникающие при действии трансмурального давления P , в соответствии с законом Лапласа равны:

$$\sigma = \frac{F_R}{S_\delta} = \frac{P D l}{2 l \delta} = \frac{P D}{2 \delta}. \quad (11)$$

Очевидно, что при повороте вектора количества движения избыточное давление $p_{\text{изб}}$ на стенку будет постепенно возрастать, достигнет некоторого максимального значения и уменьшится до нуля по завершению поворота (рис. 3):

$$P = p_0 + p_{\text{изб}}(\varphi). \quad (12)$$

Для построения эпюры $p_{\text{изб}}(\varphi)$ рассмотрим силы, действующие на движущийся (но не вращающийся) элементарный объем на изогнутом участке сосуда (рис. 3), считая, что они вызываются соответствующими ускорениями v'_i .

Как следует из рисунка, проекции вектора скорости на оси $x'oy'$ равны:

$$\begin{cases} v_x = v \cos \varphi(t), \\ v_y = v \sin \varphi(t), \end{cases}$$

а проекции векторов ускорения (и силы давления $p_{\text{изб}}(\varphi)$) на оси $x'oy'$ будут:

$$\begin{cases} a_x = v'_x(t) = v' \cos \varphi(t) - v \sin \varphi(t) \varphi'(t), \\ a_y = v'_y(t) = v' \sin \varphi(t) + v \cos \varphi(t) \varphi'(t). \end{cases} \quad (13)$$

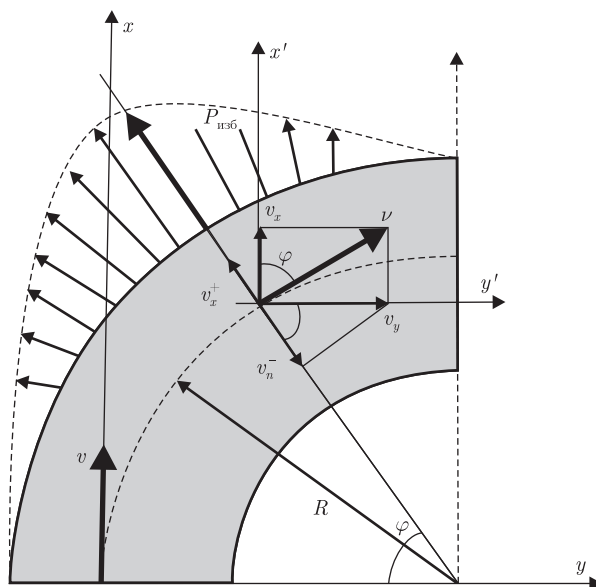


Рис. 3. Эпюра избыточных нормальных напряжений в стенке изогнутого сосуда, вызванных местными потерями напора

Для короткого участка сосуда считаем постоянными следующие гидравлические сопротивления [4]:

$$\begin{aligned}
 \text{продольный импеданс} & \quad Z_L = \frac{dP}{Q}; \\
 \text{поперечный импеданс} & \quad Z_W = \frac{P}{\frac{dQ}{dx}}; \\
 \text{входной импеданс} & \quad Z_X = \frac{P}{Q}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$Z_L Z_W = \frac{P}{Q} \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dQ} = \frac{P}{Q} \frac{dP}{dQ} = Z_X \frac{dP}{dQ},$$

откуда

$$dQ = \frac{Z_X}{Z_L Z_W} dP.$$

После деления обеих частей равенства на dt получаем

$$S \frac{dv}{dt} = \frac{Z_X}{Z_L Z_W} \frac{dP}{dt}. \tag{15}$$

Считая вектор скорости совпадающим с вектором давления, получим выражения для проекций ускорений на оси $x'oy'$. Для оси ox' $p_x = P \cos \varphi(t) = P \cos \omega t$, $\omega = \text{const}$:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{S} \frac{Z_X}{Z_L Z_W} \frac{dp_x}{dt}, \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{S} \frac{Z_X}{Z_L Z_W} \frac{dp_y}{dt}. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда

$$v'_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{1}{S} \frac{Z_X}{Z_L Z_W} \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\omega}{S} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} \sin \omega t = -\frac{\omega}{S^2} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} S_y(t), \quad (17)$$

где $S_y(t)$ — проекция площади поперечного сечения сосуда на ось y .

Аналогично, для оси y :

$$\begin{aligned} p_y &= P \sin \varphi(t) = P \sin \omega t; \\ v'_y(t) &= \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{1}{S} \frac{Z_X}{Z_L Z_W} \frac{dp_y}{dt} = \frac{\omega}{S} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} \cos \omega t = \frac{\omega}{S^2} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} S_x(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где S_x — проекция площади поперечного сечения сосуда на ось x .

Таким образом, ускорения $v'_x(t)$, $v'_y(t)$ пропорциональны проекциям $S_y(t)$, $S_x(t)$ площади поперечного сечения сосуда S на оси y и x соответственно.

Проекции ускорения \vec{v}' элементарного объема крови на нормаль к траектории движения будут:

$$\begin{cases} v_n^+ = v'_x(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -\frac{\omega}{S} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} \sin \omega t \cos \omega t; \\ v_n^- = v'_y(t) \cos \omega t = \frac{\omega}{S} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} \cos^2 \omega t. \end{cases} \quad (19)$$

Их сумма определит нормальное ускорение и, значит, нормальную силу давления на стенку как функцию угла поворота потока:

$$v'_n = v_n^+ + v_n^- = -\frac{\omega}{S} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} \left(\cos^2 \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right). \quad (20)$$

Очевидно, что максимума она достигнет тогда, когда достигнет максимума выражение в скобках (рис. 4, при $\omega = 0,8 \dots 1,3$ рад/с). Это может служить одной из причин, объясняющих явления “уплощения” вершин извитых участков КА (рис. 2).

Очевидно также, что оптимальным местом установки шунта может служить точка с наименьшими изменениями напряжений.

В работе [5] приводятся результаты исследования кровотока в аорте с аневризмой как пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости в неэластичных трубках с несимметричным расширением. Авторами получены похожие зависимости изменения давления.

Эшора ускорений в плоскости, нормальной к вектору скорости при $n = 5$ и $0 \leq \omega \leq \pi/2$, будет описываться выражением

$$|v'_{nz}|_{\substack{t=\text{const} \\ \omega=\text{const}}} = \frac{4\omega}{\pi r(n + \cos \alpha)} \frac{Z_X P}{Z_L Z_W} k \cos \alpha, \quad (21)$$

где $n = R/r$.

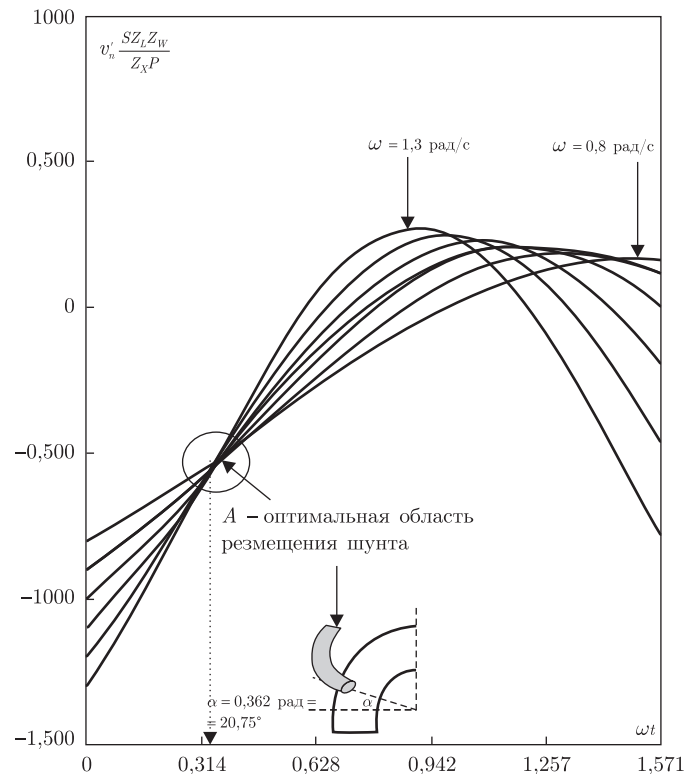


Рис. 4. Нормальное ускорение элементарного объема крови как функция угла поворота потока при изменении ωt в интервале $0 \leq \omega t \leq \pi/2$

Таким образом, кровоснабжение миокарда осуществляется сетью мелких септальных артерий, отходящих от коронарных артерий, а сами коронарные артерии можно представить в виде своеобразного закрытого короткого конуса.

Изогнутые участки коронарных артерий представляют для потока крови дополнительные гидравлические сопротивления. Полученные зависимости избыточных ускорений, связанных с извитостью сосуда и вызывающих дополнительные напряжения в его стенках, могут служить объяснением явления уплощения вершин извитых участков, что хорошо согласуется с результатами ангиографии.

Локально избыточные напряжения в стенках КА могут быть причиной рефлекторного спазма коронарных сосудов и возникновения синдрома стенокардии.

Размещение шунта на закругленном участке под углом $\alpha = 0,362 \text{ рад} = 20,75^\circ$ по отношению к горизонтали или близким к нему позволяет максимально снизить напряжения в стенке КА, что уменьшит вероятность развития синдрома стенокардии после операции и снизит нагрузки на шунт в месте его прикрепления.

1. Лебедева Е. О. Анализ распространенности извитости коронарных артерий у пациентов с сердечно-сосудистой патологией // Щорічник наук. праць Асоціації серцево-судинних хірургів України, вип. 20. Серцево-судинна хірургія. – Київ, 2012. – С. 302–306.
2. Li Y., Shen C., Ji Y., Feng Y. et al. (2011) Clinical Implication of Coronary Tortuosity in Patients with Coronary Artery Disease. PLoS ONE 6(8): e24232 // [Электронный ресурс] // Li Y., Shen C., Ji Y., Feng Y., Ma G. // <http://www.plosone.org/article/info%3Adoi%2F10.1371%2Fjournal.pone.0024232;jsessionid=04C9F03C3831B30E5570F65F162FCAC2>.

3. *do Carmo M.P.* Differential Geometry of Curves and Surfaces. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976. – 503 p.
4. *Milnor W.R.* Hemodynamics. – Baltimore: Williams & Wilkins., 1989. – 419 p.
5. *Гемодинамика* крупных кровеносных сосудов с аневризмой. [Электронный ресурс] // Бубенчиков А. М., Фирсов Д. К., Альбрандт Е. В. // Режим доступа к журн.: http://www.ebiblioteka.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/TGU/b_4/tgu_b4_02.pdf.

ГУ “Национальний інститут серцево-судинної
хірургії ім. Н. М. Амосова НАМН”, Київ

Поступило в редакцію 03.08.2012

Академік НАН України **Г. В. Книшов, С. В. Зубков, Є. А. Настенко,
Є. О. Лебедева, А. О. Матвійчук, Ю. В. Шардукова**

Моделювання профілю напружень в стінках звивистих коронарних артерій системи кровообігу людини

За допомогою математичного моделювання показано, що нерівномірний розподіл нормальних напружень на криволінійній ділянці коронарної артерії може впливати на утворення її петлеподібних вигинів із сплющеною вершиною, що добре узгоджується з даними коронарографії. Визначено зону оптимального розміщення шунта при аортокоронарному шунтуванні, в результаті чого напруження в стінці викривленої ділянки коронарної артерії можуть бути зменшені. Це знижує ймовірність розвитку нападів стенокардії, викликаних надмірним трансмуральним тиском.

Academician of the NAS of Ukraine **G. V. Knyshov, S. V. Zubkov, Ye. A. Nastenko,
Ye. O. Lebedeva, A. O. Matviychuk, Yu. V. Shardukova**

Modeling of the stress profile in the walls of tortuous coronary arteries of the human circulatory system

With mathematical modeling, it is shown that the uneven distribution of normal stresses in the curved area of a coronary artery may affect the formation of loop-shaped curves with a flattened top, which agrees well with the data of coronary angiography. The zone of optimal placement of a shunt at coronary aortic bypass grafting is defined. This decreases the stress in the wall of a curved section of the coronary artery. This reduces the risk of heart attack caused by the excessive transmural pressure after cardiac operation.