УДК 513.88

Ю. І. Оліяр, О. Г. Сторож

Абстрактні крайові оператори та деякі класи лінійних розширень лінійних відношень

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

У термінах абстрактних крайових операторів встановлено умови взаємної спряженості двох лінійних відношень у гільбертовому просторі, а також дано опис максимально дисипативних розширень симетричного відношення.

Теорія лінійних відношень ("багатозначних операторів") у гільбертових просторах була започаткована, мабуть, у статті Р. Аренса [1] і знайшла свій подальший розвиток в [2, 3] та в працях багатьох інших математиків. Нагадаємо, що якщо H — гільбертів простір (зі скалярним добутком $(\cdot\,|\,\cdot)$), то (замкненим) лінійним відношенням у H називають (замкнений) лінійний многовид у $H^2 \stackrel{\text{def}}{=} H \oplus H$. Для кожного лінійного відношення $T \subset H^2$ існує спряжене $T^* \subset H^2$ відношення, яке визначається так: $T^* = \widehat{J}T^{\perp} = T^*(= (\widehat{J}T)^{\perp})$, де $\forall\,(y, y') \in T$ $\widehat{J}(y, y') = (-iy', iy)$ (тут $\perp$ — символ ортогонального доповнення в H^2). Відношення $T \subset H^2$ називають симетричним (самоспряженим), якщо $T \subset T^*$ (відповідно $T = T^*$). Це відношення називається дисипативним (акумулятивним), якщо $\forall\,(y, y') \in T$ $\mathrm{Im}(y'\,|\,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо, крім цього, воно не має в H^2 нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень.

Зазначимо, що лінійні відношення, породжені диференціальними рівняннями (виразами), були об'єктами дослідження, наприклад, у [4–6] і що нижче систематично застосовуються такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення, область значень та многовид нулів оператора T; $(\cdot\,|\,\cdot)_X$ — символ скалярного добутку в гільбертовому просторі X; $\mathbb{I}_X$ — оператор тотожного перетворення в просторі X; $\oplus$, $\ominus$ — символи ортогональної суми та ортогонального доповнення відповідно; якщо $A_i\colon X \to Y_i(1, \ldots, n)$ — лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ означає, що для будь-якого $x \in X$ $Ax = (A_1x, \ldots, A_nx)$; $\overline{E}$ — замикання множини E; T^* — оператор, спряжений з оператором T.

Роль вихідного об'єкта відіграє пара (L, L_0) замкнених лінійних відношень таких, що $L_0 \subset L \subset H^2$.

Критерій взаємної спряженості двох замкнених лінійних відношень. Покладемо $M_0 = L^*$, $M = L_0^*$. Будь-яке замкнене лінійне відношення $L_1(M_1)$ таке, що $L_0 \subset L_1 \subset L$ (відповідно $M_0 \subset M_1 \subset M$) називатимемо власним розширенням $L_0(M_0)$. Нижче встановлено критерій взаємної спряженості відношень L_1 та M_1.

Означення 1. Нехай G — (допоміжний) гільбертів простір, а $U \in B(L, G)$. Пара (G, L) називається крайовою парою для (L, L_0), якщо $R(U) = G$, $\ker U = L_0$.

Теорема 1. *Нехай (G_L, U) та (G_M, U) — крайові пари (L, L_0) та (M, M_0) відповідно. Тоді існує єдине відображення $E\colon G_L \to G_M$ таке, що*

$$E \in B(G_L, G_M), \qquad E^{-1} \in B(G_M, G_L), \tag{1}$$

$$\forall\,\widehat{y}=(y,y')\in L,\qquad \forall\,\widehat{z}=(z,z')\in MU \qquad (y'\,|\,z)-(y\,|\,\acute{z})=(i\widehat{J}\widehat{y}\,|\,\widehat{z})_{H^2}=$$

$$=(E\widehat{U(y)}\,|\,V\widehat{z})_{G_M}=(U\widehat{y}\,|\,E^*V\widehat{z})_{G_L}. \tag{2}$$

Наслідок 1. *Нехай G_1, G_2 — гільбертові простори, $U_i\in\mathcal{B}(L,G_i)$ $(i=1,2)$, $G=G_1\oplus\oplus G_2$, $U=U_1\oplus U_2$. Припустимо, що (G,U) — крайова пара для (L,L_0). Тоді існують єдині $\widetilde{U_1}\in\mathcal{B}(M,G_2)$, $\widetilde{U_2}\in\mathcal{B}(M,G_1)$ такі, що $(\widetilde{G},\widetilde{U})$, де $\widetilde{G}=G_2\oplus G_1$, $\widetilde{U}=\widetilde{U_1}\oplus\widetilde{U_2}$, є крайовою парою для (M,M_0) і*

$$(\forall\,\widehat{y}\in L)\quad(\forall\,\widehat{z}\in M)\quad (i\widehat{J}\widehat{y}\,|\,\widehat{z})_{H^2}=(iJU\widehat{y}\,|\,\widetilde{U}\widehat{z})_{\widetilde{G}}=(U_1\widehat{y}\,|\,\widetilde{U_2}\widehat{z})_{G_1}-(U_2\widehat{y}\,|\,\widetilde{U_1}\widehat{z})_{G_2}, \tag{3}$$

де

$$(\forall\,h_1\in G_1)\qquad(\forall\,h_2\in G_2)\qquad J(h_1,h_2)=(ih_2,-ih_1). \tag{4}$$

Зауваження 1. Міркуючи так, як у [7], неважко переконатися, що в умовах наслідку 1

$$U_1\widehat{J}\widetilde{U_1^*}=0,\qquad U_1\widehat{J}\widetilde{U_2^*}=iI_{G_1},\qquad U_2\widehat{J}\widetilde{U_1^*}=-iI_{G_2},\qquad U_2\widehat{J}\widetilde{U_2^*}=0. \tag{5}$$

Твердження 1. *Нехай G_i, U_i, $\widetilde{U}_i$ $(i=1,2)$ такі, як у наслідку 1, а $L_1\stackrel{\mathrm{def}}{=}\ker U_1$. Тоді $L_1^*\stackrel{\mathrm{def}}{=}\ker\widetilde{U_1}$.*

Теорема 2. *Припустимо, що $L_0\subset L_1=\overline{L_1}\subset L$, G — гільбертів простір, причому $\dim G=\dim(L\ominus L_0)$. Тоді:*

а) існують ортогональний розклад $G=G_1\oplus G_2$ та оператори

$$U_1\in\mathcal{B}(L,G_1),\qquad V_1\in\mathcal{B}(M,G_2) \tag{6}$$

такі, що

$$L_1=\ker U_1,\qquad L_1^*=\ker V_1, \tag{7}$$

а отже,

$$\ker U_1\supset L_0,\qquad \ker V_1\supset M_0; \tag{8}$$

б) не зменшуючи загальності, можна вважати, що

$$R(U_1)=G_1,\qquad R(V_1)=G_2. \tag{9}$$

Беручи до уваги теорему 2, бачимо, що природним чином постає така задача.

Нехай:

а) $G=G_1\oplus G_2$ (де G_1, G_2 — гільбертові простори), $\dim G=\dim(L\ominus L_0)$, а оператори U_1, V_1 задовольняють (6) та (8);

б)

$$L_1=\ker U_1,\qquad M_1=\ker V_1. \tag{10}$$

Встановити критерій взаємної спряженості відношень L_1 та M_1.

Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 3. *Відношення* L_1 *та* M_1 *(див.* (6), (8) *та* (10)*) є взаємно спряженими тоді і тільки тоді, коли* $\ker U_1 = L_0 \oplus \widehat{JR(V_1^*)}$.

Максимально дисипативні розширення симетричних відношень. Розглянемо ситуацію, коли L_0 — симетричне відношення в H, а $L = L_0^*$, і опишемо максимально дисипативні розширення відношення L_0. У випадку, коли L_0 — щільно визначений оператор з однаковими дефектними числами (в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком), такий опис наведено у [8–10]. Випадок, коли оператор є скінченновимірним звуженням (щільно визначеного) симетричного оператора, досліджено в [11, 12].

Перш ніж переходити до конкретних формулювань, зазначимо, що нижче використовуються такі позначення:

$$\widehat{H_L} = L \ominus L_0, \qquad H_L^{\pm} = \ker(L \mp i\mathbb{I}_H)(= \{y \in H \colon (y, \pm iy) \in L\}),$$

$$\widehat{H_L^{\pm}} = \{(y, \pm iy) \in H^2 \colon y \in \widehat{H_L^{\pm}}\}, \qquad m^{\pm} = \dim(H_L^{\pm})(= \dim \widehat{H_L^{\pm}}).$$

Відомо [2], що $\widehat{H_L} = \widehat{H_L^{+}} \oplus \widehat{H_L^{-}}$, тобто $L = L_0 \oplus \widehat{H_L^{+}} \oplus \widehat{H_L^{-}}$.

Означення 2. Нехай G^+, G^- — (допоміжні) гільбертові простори, $\delta_{\pm} \in \mathcal{B}(L, G^{\pm})$, $G \stackrel{\text{def}}{=} G^+ \oplus G^-$, $\delta = \delta_+ \oplus \delta_-$.

Набір $(G^+, G^-, \delta_+ \delta_-)$ називається граничною четвіркою для L_0 якщо:

а) $\dim G^{\pm} = m^{\pm}$;

б) $\ker \delta = L_0$;

в) $R(\delta) = G$;

г) $(\forall\, \widehat{y} \in L)$ $(\forall\, \widehat{z} \in L)$ $(i\widehat{J}\widehat{y} \,|\, \widehat{z})_{H^2} = i[(\delta_+ \widehat{y} \,|\, \delta_+ \widehat{z})_{G^+} - (\delta_- \widehat{y} \,|\, \delta_- \widehat{z})_{G^-}]$.

Зрозуміло, що (G, δ) є крайовою парою для (L, L_0) і $(\forall\, \widehat{y} \in L)$ $(\forall\, \widehat{z} \in L)$ $(i\widehat{J}\widehat{y} \,|\, \widehat{z})_{H^2} = (iI\delta\widehat{y} \,|\, \delta\widehat{z})_G$, де

$$I = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{G^+} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{G^-} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Нехай* G *— гільбертів простір такий, що* $\dim G = \dim(L \ominus L_0)$. *Тоді існують ортогональний розклад* $G = G^+ \oplus G^-$ *та оператори* $\delta_{\pm} \in \mathcal{B}(L, G^{\pm})$ *такі, що* $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ *— гранична четвірка для* L_0.

Теорема 5. *Нехай* $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ *— гранична четвірка для* L_0, $G = G^+ \oplus G^-$, $A_1^{\pm} \in \mathcal{B}(G^{\pm}, G^-)$ *(відповідно* $A_1^{\pm} \in \mathcal{B}(G^{\pm}, G^+)$*),*

$$L_1 = \{y \in L \colon A_1^+ \delta_+ y + A_1^- \delta_- y = 0\}.$$

Такі твердження еквівалентні:

а) L_1 *— максимально дисипативне (максимально акумулятивне) відношення;*

б) $A_1^{\pm}(A_1^{\pm})^* \leqslant A_1^-(A_1^-)^*$, $\ker A_1^- = \{0\}$ *(відповідно* $A_1^{\pm}(A_1^{\pm})^* \geqslant A_1^-(A_1^-)^*$, $\ker A_1^+ = \{0\}$*);*

в) існує стиск $K \in \mathcal{B}(G^+, G^-)$ *такий, що* $L_1 = \{y \in L \colon \delta_- y = K\delta_+ y\}$ *(відповідно існує стиск* $K \in \mathcal{B}(G^-, G^+)$ *такий, що* $L_1 = \{y \in L \colon \delta_+ y = K\delta_- y\}$*).*

Зауваження 1. Припустимо, що L_0 має однакові дефектні числа ($m^+ = m^-$), а $G^+ = G^-$ (таке припущення не зменшує загальності). В умовах теореми 4 відношення L_1 є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли $A_1^{\pm}(A_1^{\pm})^* = A_1^-(A_1^-)^*$, $\ker A_1^{\pm} = \{0\}$.

Зауваження 2. Як доведено в [11] (див. також [12]), будь-яке дисипативне (акумулятивне) розширення симетричного лінійного відношення L_0 є звуженням відношення $L = L_0^*$, тому в теоремі 5 фактично дано опис усіх максимально дисипативних та максимально акумулятивних (а в деяких випадках і самоспряжених) розширень симетриного відношення в термінах абстрактних крайових умов.

1. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacif. J. Math. – 1961. – **11**, No 1. – P. 9–23.
2. *Coddington E. A.* Stlf-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear operators // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, No 4. – P. 712–715.
3. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Self-adjoint extensions of symmetric subspaces // Pacif. J. Math. – 1974. – **54**, No 1. – P. 71–100.
4. *Hassi S., de Snoo H. S. V., Sterk A., Winkler H.* Finite-dimensional graph perturbations of selfadjoint Sturn–Liouville operators // Operator Theory, Structured Matrices, and Dilations: Tiberiu Constantinescu Memorial Volume. – Theta Foundation, 2007. – P. 205–226.
5. *Bruk V. M.* On linear relations generated by nonnegative operator function and degenerate elliptic differential operator extension // J. Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – **5**, No 2. – P. 123–144.
6. *Bruk V. M.* On linear relations generated by a differential expression and by a Nevanlinna operator function // Ibid. – 2011. – **7**, No 2. – P. 115–140.
7. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 210 с.
8. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.
9. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сборник. – 1976. – **100**, № 2. – С. 210–216.
10. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 248 с.
11. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 2. – С. 314–320.
12. *Сторож О. Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених операторів // Карпат. мат. публ. – 2009. – **1**, № 2. – С. 207–213.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 15.10.2012

Ю. И. Олияр, О. Г. Сторож

Абстрактные краевые операторы и некоторые классы расширений линейных отношений

В терминах абстрактных краевых операторов установлены условия взаимной сопряженности двух линейных отношений в гильбертовом пространстве, а также дано описание максимально диссипативных расширений симметрического отношения.

Yu. I. Olijar, O. G. Storozh

Abstract boundary operators and some classes of extensions of linear relations

In terms of abstract boundary operators, the criteria of mutual adjointness for two relations in a Hilbert space are established. The description of maximally dissipative extensions of a given symmetric relation is given.