УДК 517.9

В. В. Семенов

Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С. И. Ляшко)

Изучена абстрактная схема вычисления обобщенной проекции Альбера на замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства. Доказана теорема сильной сходимости гибридного метода с обобщенной проекцией для счетного семейства относительно квазинерастягивающих операторов.

Построение и исследование итерационных методов метрической теории неподвижных точек — интересная, имеющая много приложений и активно развивающаяся область нелинейного анализа. В работе мы рассмотрим абстрактную схему вычисления обобщенной проекции Альбера на замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства. Применив эту схему, мы получим теорему сильной сходимости гибридого метода с обобщенной проекцией для счетного семейства относительно квазинерастягивающих операторов. Наш анализ совсем не использует понятий, связанных со слабой топологией (демизамкнутость, свойство Кадеца–Кли). Все необходимые сведения по геометрии банаховых пространств и нелинейному анализу изложены в работах [1–4].

Основные понятия и вспомогательные факты. Обозначим E действительное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; E^* — сопряженное к E пространство; $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционала $x^* \in E^*$ на элементе $x \in E$. Норму в E^* будем обозначать $\|\cdot\|$, сильную сходимость в E — символом $\to$. Многозначный оператор $J\colon E \to 2^{E^*}$, действующий следующим образом:

$$Jx = \{x^* \in E^*\colon \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},$$

называют дуальным оператором [1]. Известно, что: 1) если пространство E гладкое, то оператор J однозначный; 2) если пространство E рефлексивное, то оператор J сюръективый; 3) если пространство E строго выпуклое, то оператор J инъективный и строго монотонный; 4) если пространство E равномерно гладкое, то оператор J равномерно непрерывный на ограниченных подмножествах E.

Далее будем предполагать, что банахово пространство E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое. Рассмотрим функционал

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle Jy, x\rangle + \|y\|^2$$

для x, $y \in E$ (если пространство E гильбертово, то $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$). Из определения ϕ следует

$$(\|x\| - \|y\|)^2 \leqslant \phi(x, y) \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$$

для x, $y \in E$. Кроме того, для x, y, $z \in E$ имеет место тождество

$$\phi(x, y) = \phi(x, z) - \phi(z, y) + 2\langle Jz - Jy, x - z\rangle.$$

Полезным инструментом является

Лемма 1 [4]. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, (x_n), (y_n) — ограниченные последовательности элементов E. Тогда*

$$x_n - y_n \to 0 \Leftrightarrow Jx_n - Jy_n \to 0 \Leftrightarrow \phi(x_n, y_n) \to 0.$$

Пусть $C \subseteq E$ — замкнутое выпуклое множество, $x \in E$. Известно [4], что существует единственная точка $z \in C$, такая, что

$$\phi(z, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x).$$

Эту точку z обозначают $\Pi_C x$, а соответствующий оператор Π_C называют обобщенной проекцией E на C (обобщенной проекцией Альбера) [4]. Заметим, что если E — гильбертово пространство, то Π_C совпадает с метрической проекцией на C.

Лемма 2 [4]. *Пусть C — замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства E, $x \in E$, $z \in C$. Тогда*

$$z = \Pi_C x \Leftrightarrow \langle Jz - Jx, y - z\rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, y \in C. \tag{1}$$

Замечание 1. Неравенство из (1) равносильно следующему:

$$\phi(y, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leqslant \phi(y, x) \qquad \forall\, x \in E, \qquad \forall\, y \in C.$$

Вычисление обобщенной проекции. Предположим, что C — замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства E, $x_0 \in E$. Рассмотрим задачу вычисления обобщенной проекции Альбера $\Pi_C x_0$, т. е. единственного решения задачи минимизации

$$\phi(y, x_0) \to \min, \qquad y \in C. \tag{2}$$

Замечание 2. В качестве C мы будем рассматривать множества неподвижных точек операторов $T\colon E \to E$ определенного вида.

Для произвольной пары элементов $x, y \in E$ определим множество

$$H(x, y) = \{z \in E\colon \phi(z, y) \leqslant \phi(z, x)\} = \{z \in E\colon 2\langle Jx - Jy, z\rangle \leqslant \|x\|^2 - \|y\|^2\}. \tag{3}$$

Множество $H(x, y)$ является замкнутым полупространством (совпадающим с E в случае $x = y$). Рассмотрим следующий абстрактный итерационный алгоритм.

Алгоритм 1. Для точки $x_0 \in E$ строим последовательность (x_n) по схеме: берем $x_1 \in E$, полагаем $C_1 = E$, для $x_n \in E$ указываем $y_n \in E$ и выполняем операции

$$\begin{cases} C_{n+1} = C_n \bigcap H(x_n, y_n), \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0. \end{cases}$$

Замечание 3. Алгоритм 1 — абстрактная форма так называемых гибридных методов аппроксимации неподвижных точек [5–10].

Прежде всего заметим, что в случае возможности построения последовательности (x_n) имеем цепочку вложений

$$E = C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \cdots ,$$

откуда следует неравенство

$$\phi(x_n, x_0) = \min_{y \in C_n} \phi(y, x_0) \leqslant \min_{y \in C_{n+1}} \phi(y, x_0) = \phi(x_{n+1}, x_0).$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(x_n, x_0) = L \in [0, +\infty) \bigcup \{+\infty\}$. Если последовательность (x_n) имеет ограниченную подпоследовательность, то $L < +\infty$.

Если $m < n$, то $x_n \in C_n \subseteq C_{m+1} = C_m \bigcap H(x_m, y_m)$, откуда следует, что

$$\phi(x_n, y_m) \leqslant \phi(x_n, x_m). \tag{4}$$

Применив для $x_m = \Pi_{C_m} x_0$ и $x_n \in C_m$ лемму 2, получим полезное неравенство

$$\langle Jx_m - Jx_0, x_n - x_m \rangle \geqslant 0. \tag{5}$$

Имеет место

Лемма 3. *Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность. Предположим, что для произвольной подпоследовательности (x_{n_k}) имеем*

$$\left.\begin{matrix} x_{n_k} \to x, \\ x_{n_k} - y_{n_k} \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in C. \tag{6}$$

Тогда произвольная ограниченная подпоследовательность последовательности (x_n) сходится к точке из C.

Доказательство. Пусть (x_{n_k}) — ограниченная подпоследовательность последовательности (x_n). Для $k > l$ имеем

$$\phi(x_{n_k}, x_{n_l}) = \phi(x_{n_k}, x_0) - \phi(x_{n_l}, x_0) + 2\langle Jx_0 - Jx_{n_l}, x_{n_k} - x_{n_l} \rangle.$$

Учитывая (5), получаем

$$\phi(x_{n_k}, x_{n_l}) \leqslant \phi(x_{n_k}, x_0) - \phi(x_{n_l}, x_0) \to 0 \qquad \text{при} \qquad k > l \to \infty.$$

Из леммы 1 следует $\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \to 0$, т. е. подпоследовательность (x_{n_k}) фундаментальна. Таким образом, существует элемент $x \in E$, такой, что $x_{n_k} \to x$. Имеем

$$x_{n_k} - y_{n_k} = \underbrace{(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})}_{\to 0} + (x_{n_{k+1}} - y_{n_k}) \to 0,$$

поскольку из (4) и леммы 1 следует

$$\phi(x_{n_{k+1}}, y_{n_k}) \leqslant \phi(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{n_{k+1}} - y_{n_k} \to 0.$$

Включение $x \in C$ следует из (6).

Теорема 1. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $C \subseteq E$ — замкнутое выпуклое множество. Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1* *последовательность. Предположим, что* $C \subseteq C_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и для произвольной подпоследовательности* (x_{n_k}) *выполняется* (6). *Тогда справедливы утверждения:*

(i) если $C \neq \varnothing$, *то* $x_n \to \Pi_C x_0$;

(ii) если $C = \varnothing$, *то* $\|x_n\| \to +\infty$.

Доказательство. Докажем (i). Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\phi(x_n, x_0) = \min_{y \in C_n} \phi(y, x_0) \leqslant \min_{y \in C} \phi(y, x_0) < +\infty. \tag{7}$$

Следовательно, $\sup_n \|x_n\| < +\infty$. По лемме 3, имеем $x_n \to x \in C$. Переходя к пределу в (7), получаем $\phi(x, x_0) \leqslant \min_{y \in C} \phi(y, x_0)$, т. е. $x = \Pi_C x_0$.

Докажем (ii). Предположим, что $\liminf_{n \to \infty} \|x_n\| < +\infty$. Тогда (x_n) содержит ограниченную подпоследовательность, которая, согласно лемме 3, должна сходиться к точке из C. Последнее невозможно вследствие того, что $C = \varnothing$. Таким образом, $\|x_n\| \to +\infty$.

Поиск неподвижных точек. Множество неподвижных точек оператора $T \colon E \to E$ обозначим $F(T) = \{x \in E \colon x = Tx\}$.

Определение 1. Оператор $T \colon E \to E$ называют относительно квазинерастягивающим, если

1) $F(T) \neq \varnothing$;

2) $\phi(x, Ty) \leqslant \phi(x, y)$ $\forall\, x \in F(T)$ $\forall\, y \in E$.

Определение 2 [7]. Семейство операторов $\{T_n \colon E \to E\}$ удовлетворяет $(*)$-условию, если

1) $\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing$;

2) для любой последовательности (x_n) имеем

$$\left.\begin{aligned} &x_n \to x, \\ &x_n - T_n x_n \to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \mathcal{F}.$$

Замечание 4. Если $T_n \equiv T$ и оператор T замкнут, то семейство $\{T_n\}$ удовлетворяет $(*)$-условию.

Замечание 5. Для семейства относительно квазинерастягивающих операторов, удовлетворяющего $(*)$-условию, множество $\mathcal{F}$ выпукло и замкнуто.

Детализируем абстрактный алгоритм 1 для решения задачи

$$\text{найти} \qquad \Pi_{\mathcal{F}} x_0, \qquad x_0 \in E,$$

где $\mathcal{F} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(T_n)$; $\{T_n \colon E \to E\}$ — счетное семейство относительно квазинерастягивающих операторов.

Алгоритм 2. Для точки $x_0 \in E$ строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in E, \qquad C_1 = E, \\ C_{n+1} = C_n \bigcap H(x_n, T_n x_n), \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0. \end{cases}$$

Замечание 6. Для нерастягивающих операторов, действующих в гильбертовом пространстве, алгоритм 2 предложен и изучен в [5]. Случай квазинерастягивающего (фейеровского) оператора, действующего в гильбертовом пространстве, изучен в [10].

Простым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $\{T_n \colon E \to E\}$ — счетное семейство относительно квазинерастягивающих операторов, удовлетворяющие $(*)$-условию. Тогда порожденная алгоритмом 2 последовательность (x_n) сильно сходится к точке $\Pi_{\mathcal{F}} x_0$.*

Доказательство. Предположим, что $C_n \neq \varnothing$ и $\mathcal{F} \subseteq C_n$. Имеем

$$\phi(z, T_n x_n) \leqslant \phi(z, x_n) \qquad \forall\, z \in \mathcal{F} \subseteq F(T_n).$$

Следовательно, $\mathcal{F} \subseteq H(x_n, T_n x_n)$. Таким образом, $\mathcal{F} \subseteq C_{n+1}$. Получили цепочку вложений

$$E = C_1 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F} \neq \varnothing$$

и корректность определения последовательности (x_n). Из теоремы 1 следует сильная сходимость (x_n) к точке $\Pi_{\mathcal{F}} x_0$.

Заключительные замечания. Теорема 2 справедлива и для варианта алгоритма 1 с

$$y_n = J^{-1}(\lambda_n J x_n + (1 - \lambda_n) J T_n x_n), \qquad 0 \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda < 1.$$

В [11] Wu и Huang ввели новое понятие “обобщенного f-проекционного оператора” в банаховом пространстве. Их конструкция является обобщением проекции Альбера и проксимального оператора Моро.

Для замкнутого выпуклого множества $C \subseteq E$ и выпуклого полуненпрерывного снизу функционала $f \colon E \to \mathbb{R}$ рассмотрим функционал

$$G(x, y) = f(x) + \phi(x, y) = f(x) + \|x\|^2 - 2\langle Jy, x\rangle + \|y\|^2$$

и задачу минимизации

$$\text{найти} \qquad z \in C\colon \qquad G(z, x) = \min_{y \in C} G(y, x), \qquad x \in E.$$

Оператор $\Pi_C^f x = \operatorname*{argmin}_{y \in C} G(y, x)$ называют обобщенным f-проекционным оператором [11]. Он корректно определен в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве.

Рассмотрим

Алгоритм 3. Для точки $x_0 \in E$ строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in E, \qquad C_1 = E, \\ C_{n+1} = C_n \bigcap H(x_n, T_n x_n), \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}^f x_0. \end{cases}$$

Имеет место

Теорема 3. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство; $\{T_n \colon E \to E\}$ — счетное семейство относительно квазинерастягивающих операторов, удовлетворяющие $(*)$-условию; $f \colon E \to \mathbb{R}$ — выпуклый полуненпрерывный снизу функционал. Тогда порожденная алгоритмом 3 последовательность (x_n) сильно сходится к точке $\Pi_{\mathcal{F}}^f x_0$.*

Принципиальным моментом рассмотренных методов является вычисление проекции фиксированной точки на все более сложный многогранник. Для преодоления этой проблемы необходимы методы, способные по известной проекции точки на многогранник быстро получить проекцию точки на новый многогранник с одним добавленным ограничением.

Автор благодарен Ю. В. Малицкому за акцент на работу [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного агенства по вопросам науки, инноваций и информатизации Украины (проект GP/F44/042).

1. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1972. – 416 с.
2. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. – Киев: Выща шк., 1980. – 215 с.
3. *Bauschke H. H., Combettes P. L.* Convex Analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. – Berlin: Springer, 2011. – 408 p.
4. *Alber Y. I.* Metric and generalized projection operators in Banach space: properties and applications // Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type / Ed. by A. G. Katrosatos. – New York: Marcel Dekker, 1996. – P. 15–50.
5. *Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R.* Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **341**. – P. 276–286.
6. *Takahashi W., Zembayashi K.* Strong convergence theorem by a new hybrid method for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings // Fixed Point Theory Appl. – 2008. – **11**. – Article ID 528476.
7. *Boonchari D., Saejung S.* Approximation of common fixed points of a countable family of relatively nonexpansive mappings // Fixed Point Theory Appl. – 2010. – **26**. – Article ID 407651.
8. *Семенов В. В.* Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейєрівського оператора // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2010. – № 4(103). – С. 89–93.
9. *Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В.* Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Там само. – 2011. – № 1(104). – С. 10–23.
10. *Bauschke H. H., Chen J., Wang X.* A projection method for approximating fixed points of quasi nonexpansive mappings without the usual demiclosedness condition, http://arxiv.org/abs/1211.1639.
11. *Wu K. Q., Huang N. J.* The generalized f-projection operator with an application // Bull. Aust. Math. Soc. – 2006. – **73**. – P. 307–317.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 23.11.2012

В. В. Семенов

Про одну принципову схему обчислення узагальненої проекції

Досліджено абстрактну схему обчислення узагальненої проекції Альбера на замкнену опуклу підмножину рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору. Доведено теорему про сильну збіжність гібридного методу з узагальненою проекцією для зліченної сім'ї відносно квазінерозтягуючих операторів.

V. V. Semenov

About one basic scheme of calculation of a generalized projection

The abstract scheme for calculating the Alber generalized projection on the closed convex subset of a uniformly convex and uniformly smooth Banach space is investigated. The strong convergence theorem for a hybrid method with generalized projection for a countable family of relatively quasi-nonexpansive operators is proved.